

Les suites – Récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans tout ce cours, on notera :

- la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- « A partir d'un certain rang » : APRC

Ce cours est en fait une méthode pour étudier ce genre de suite.

1) Etude de la fonction f

- Trouver l'ensemble de définition
- Calcul de la dérivée
- Tableau de variation et intervalles stables par f .
- Courbe et la première bissectrice
- Résoudre $f(x) = x$ et signe de $f(x) - x$.

2) Limites éventuelles

- Les solutions de $f(x) = x$ sont les limites éventuelles de la suite u . Si u converge alors $L = f(L)$.

3) Sens de variation

- Si f est croissante et continue sur I stable par f alors la suite u est monotone. Le sens de variation de u dépend du signe de $u_1 - u_0$.
- Si f est décroissante et continue sur I stable par f alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.
- Si la fonction $f(x) - x$ garde un signe constant sur I stable par f alors la suite u est monotone.

4) Précisions sur la convergence

- On rajoute une hypothèse supplémentaire sur f :

$$\boxed{\exists k \in [0, 1[\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|}$$

Une telle fonction est dite lipschitzienne (avec $k > 0$, elle est dite k -lipschitzienne). Si $k < 1$, on dit que f est contractante.

- Si f est contractante alors elle admet au plus un point fixe.
- Soit u une suite. Si f est k -contractante sur I et si elle admet un point fixe L alors pour tout u_0 de I , u converge vers L et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L| \leq k^n |u_0 - L|}$$