Sommes de sous espaces vectoriels

Dans tout ce cours, on désignera K comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un espace vectoriel sur K.
L'abréviation « sev » désigne un « sous espace vectoriel ».

I) Opérations sur les sous espaces vectoriels

1) Intersection de sous espaces vectoriels

- **Proposition** : Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque non vide de sev de E alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} Fi$ est un sev de E.

  Remarque : L'ensemble I n'est pas nécessairement fini.

- **Théorème** : Soit A une partie de E. L'ensemble des sev de E contenant A est non vide et l'intersection de tous les sev de E contenant A est le plus petit sev contenant A. Il est appelé sev engendré par A es est noté Vect(A). A est alors appelé partie génératrice de Vect(A).

  Remarque : Cette notion étend celle de familles génératrices finies d'un espace.

2) Somme de sous espaces vectoriels

- **Définition** : Soit F et G deux sev de E.
  On note $(F + G) = \{x + y \,/\, x \in F \text{ et } g \in G\}$. (F + G) est un sev de E et c'est le plus petit contenant F et G. Il est appelé somme de F et G.

- **Théorème** : Si F et G sont deux sev de E et si $(x_1, \ldots, x_n)$ [resp. $(y_1, \ldots, y_n)$] est une famille génératrice de F [resp. de G] alors $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est une famille génératrice de F + G.

3) Somme directes

- **Définition** : Soit F et G deux sev de E. On dit que F et G sont en somme directe lorsque tout vecteur de (F + G) s'écrit de manière unique sous la forme (f + g) ou $f \in F$ et $g \in G$.

$$\boxed{\forall x \in (F+G),\ \exists!(f,g) \in F \times G \,/\, x = f+g}$$

On le notera : $\boxed{F \oplus G}$

- **Théorème** : Si F et G sont deux sev de E, la somme (F + G) est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

$$\boxed{F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}}$$

- **Théorème** : Si F et G sont deux sev de E par somme directe de bases respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ alors $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est une base de $F \oplus G$.

4) Sous espaces vectoriels supplémentaires

- **Définition** : Soit F et G deux sev de E. F et G sont dits supplémentaires lorsque :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists!(y,z) \in F \times G \,/\, x = y+z}$$

Dans ce cas, on dira que F est *UN* supplémentaire de G.

Attention : Il n'y a pas unicité du supplémentaire !!

- **Théorème** : Soit F et G deux sev de E. F et G sont supplémentaire ($F \oplus G = E$) si et seulement si (F + G) = E et $F \cap G = \{0_E\}$.

$$\boxed{F \oplus G = E \Leftrightarrow (F+G=E) \text{ et } (F \cap G = \{0_E\})}$$

II) Projecteurs, symétries et affinités

1) Projecteurs et symétrie

- **Définition** : Soit h et h' deux sev supplémentaires de E.
Pour tout x de E, on peut l'écrire de façon unique : $x = h + h'$ avec $h \in H$ et $h' \in H'$.

    1) L'application de E dans E qui à x associe h est appelé projecteur sur H de direction H' en projection sur H parallèlement à H'.
    2) L'application de E dans E qui à x associe $h - h'$ est appelé symétrie par rapport à H parallèlement à H'.

    Dans les deux cas, H est la base et H' est la direction de l'application.

- **Théorème** : Soit H et H' deux sev supplémentaires de E et p un projecteur sur H de direction H'.
    1) p est un endomorphisme de E et $(p \circ p)(x) = p(x)$
    2) $H = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $H' = \mathrm{Ker}(p)$

- **Théorème** : Soit p une application de E dans E alors p est un projecteur si et seulement si
    1) p est linéaire
    2) $(p \circ p)(x) = p(x)$

- **Théorème** : Soit H et H' deux sev supplémentaires de E et s une symétrie par rapport à H de direction H'.
    1) s est un automorphisme de E et $s^{-1}(x) = s(x)$
    2) $H = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $H' = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$

- **Théorème** : Soit s une application de E dans E alors s est une symétrie si et seulement si
    1) s est linéaire
    2) $(s \circ s)(x) = \mathrm{Id}_E$

- **Théorème** : Soit H et H' deux sev supplémentaires.
Soit p (resp. p') la projection sur H (resp. H') parallèlement à H' (resp. H) et soit s (resp. s') la symétrie par rapport à H (resp. H') parallèlement à H' (resp. H). On a alors :

$$\boxed{\begin{cases} p+p'=Id_E \text{ et } p\circ p'=p'\circ p=0_{L(E)} \\ s+s'=0_{L(E)} \text{ et } s\circ s'=s'\circ s=-Id_E \\ s=2p-Id_E \text{ et } s'=2p'-Id_E \end{cases}}$$

2) Affinités

- **<u>Définition</u>** : Soit H et H' deux sev supplémentaires de E et soit p le projecteur sur H de direction H'. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'affinité de base H, de direction H' et de rapport λ est l'application :

$$\boxed{\begin{aligned} a_\lambda : E &\to E \\ x &\mapsto \lambda x+(1-\lambda)p(x) \end{aligned}}$$

En d'autres termes, si $x = h + h'$ avec $h \in H$ et $h' \in H'$ alors :

$$\boxed{a_\lambda(x)=h+\lambda h'}$$