

Les polynômes – Fonctions et racines

Dans tout ce cours, on notera :

- $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}
- $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q a_k X^k$ deux polynômes quelconques
- coefficient d'indice k du polynôme P : $\text{coeff}(k, P) = a_k$

I) Racines d'un polynôme

1) Existence

- **Définition** : Soit $P \in K[X]$. Une racine de P est un scalaire α tel que $P(\alpha) = 0$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P .
- **Théorème** : (d'Alembert – Gauss). Tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe.
- Un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

2) Factorisation

- **Théorème** : Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha) \mid P$
- Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au plus n racines complexes distinctes.

3) Racines multiples – Ordre de multiplicité

- **Définition** : Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $k \in \mathbb{N}^*$
 - α est une racine multiple de P lorsque $(X - \alpha)^2 \mid P$
 - Dans ce cas, on dit que α est une racine d'ordre k exactement si $k = \max\{i \in \mathbb{N}^* \mid (X - \alpha)^i \mid P\}$. Autrement dit, k est l'ordre de multiplicité de α si et seulement si $(X - \alpha)^k \mid P$ et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P .
 - Si α est racine de P d'ordre de multiplicité 1 alors on dit que α est une racine simple de P .

Remarque : $(X - \alpha)^k \mid P \Leftrightarrow \alpha$ est racine d'ordre au moins k de P .

$$\alpha \text{ racine d'ordre } k \text{ exactement} \Leftrightarrow \begin{cases} P = (X - \alpha)^k Q \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

- **Application** : Si P est non nul et admet une racine d'ordre k alors $\deg(P) \geq k$. Si P est le polynôme nul alors on peut dire que pour tout $\alpha \in K$ est racine avec un ordre infini.
- Si P admet r racines $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ distinctes et d'ordre de multiplicité k_1, \dots, k_r alors P est divisible par $(X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_r)^{k_r}$.

En particulier, $\deg(P) \geq k_1 + \dots + k_r$

Tout polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. Donc une racine d'ordre k est comptée k fois.

- **Théorème** : Caractérisation de l'ordre de multiplicité par les dérivées successives.

Soit P un polynôme et $\alpha \in K$ et $k \in \mathbb{N}^*$ alors α est racine de P d'ordre k si et seulement si :

$$\boxed{\begin{cases} P(\alpha) = 0, P'(\alpha) = 0, \dots, P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}}$$

En particulier, α est racine simple de P si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.

- Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. α est racine d'ordre k de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre k de P .

$$\text{Donc } \boxed{(X - \alpha)^k (X - \overline{\alpha})^k \mid P \Leftrightarrow (X - \alpha)^k \mid P}$$

II) Polynômes scindés

1) Définition – Cas réel et complexe

- **Définition** : Un polynôme est dit scindé si il est de la forme :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k), \lambda \in K^*, (a_1, \dots, a_n) \in K^n}$$

λ est le coefficient dominant et a_1, \dots, a_n sont les racines de P .

- **Théorème** :
 - Tout polynôme est scindé dans \mathbb{C} .
 - Soit P un polynôme alors P est toujours le produit d'un polynôme scindé sur \mathbb{R} et d'un polynôme à coefficients réels sans racines réelles.
 - En particulier, si $\deg(P) = n$ et si P admet n racines réelles (avec multiplicité) alors P est scindé sur \mathbb{R} .
- Soit $P = \lambda(X - b_1)^{k_1} \dots (X - b_m)^{k_m}$ un polynôme scindé alors les diviseurs de P sont de la forme :

$$\boxed{R = \mu(X - b_1)^{l_1} \dots (X - b_m)^{l_m}, \mu \in K^*, \forall i \in [1, m], 0 \leq l_i \leq k_i}$$

2) Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

- **Définition** : (Fonctions symétriques). Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ alors pour tout $k \in [1, n]$, on note :

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \times x_{i_2} \times \dots \times x_{i_k}$$

C'est la k ième fonction symétrique associée à (x_1, \dots, x_n) .

- **Théorème** : Soit P un polynôme scindé de degré n . La liste de ses racines (avec multiplicité) sont les $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et on a :

$$\forall k \in [1, n], \sigma_k = (-1)^k \frac{\text{coeff}(n-k, P)}{\lambda}$$