

Matrices et changement de base

Dans tout ce cours, on désignera K comme \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E désigne un espace vectoriel sur K .

L'abréviation « sev » désigne un « sous espace vectoriel ».

I) Changement de base et matrices semblables

1) Changement de base

- **Définition** : Soit E un K -ev de dimension finie et soit B et B' deux bases de E . On appelle matrice de passage de B à B' , la matrice notée : $\text{mat}_B(B')$.
- **Théorème** : Soit E un K -ev et B, B' et B'' trois bases de E . On note P la matrice de passage de B à B' et P' celle de B' à B'' .
 - 1) P est inversible et $P = \text{mat}_{B',B}(\text{Id}_E)$ et $P^{-1} = \text{mat}_B(B')$ matrice de passage de B' à B .
 - 2) La matrice de passage de B à B'' est PP' .
- **Théorème** : Soit E et F deux K -ev de dimension finie et B, B' deux bases de E ainsi que C, C' deux bases de F . Soit P la matrice de passage de B à B' et Q celle de C à C' .
 - 1) Soit $x \in E$ et X, X' deux vecteurs colonnes des coordonnées de x dans B et dans B' alors $X = PX'$.
 - 2) Soit f une application linéaire de E dans F et $A = \text{mat}_{B,C}(f)$ et $A' = \text{mat}_{B',C'}(f)$ alors $A' = Q^{-1}AP$.

2) Matrices semblables

- **Définition** : Soit A et B deux matrices carrées de taille n de K . On dira que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible P de taille n telle que $B = P^{-1}AP$.
- **Théorème** : La relation « être semblable » est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

II) Rang d'une matrice

- **Définition** : Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Le rang de l'application linéaire A' de K^p dans K^n de matrice A est le même que celui de la famille des vecteurs colonnes de A dans K^n . Cette valeur commune est alors appelée rang de la matrice A et notée $\text{rg}(A)$.
- **Corollaire** : Soit $A \in M_n(K)$ alors A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.
- **Théorème** : Soit E et F deux K -ev de bases respectives B et C .
 - 1) Si F est une famille de E alors $\text{rg}(\text{mat}_B(F)) = \text{rg}(F)$
 - 2) SI $f \in L(E,F)$ alors $\text{rg}(\text{mat}_{B,C}(f)) = \text{rg}(f)$.
- **Théorème** : Soit $A \in M_{n,p}(K)$, $P \in M_n(K)$, $Q \in M_p(K)$ avec P et Q inversibles. On a alors $\text{rg}(PA) = \text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$. De plus, deux matrices semblables ont le même rang.
- **Théorème** : Soit $A \in M_{n,p}(K)$ alors $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$

III) Opérations élémentaires sur les matrices

1) Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes

- **Définition** : On appelle opération élémentaire sur les lignes une des trois transformations suivantes :
 - 1) Echange de ligne i et j d'une matrice noté $L_i \leftrightarrow L_j$
 - 2) Multiplication de la ligne i d'une matrice par un scalaire non nul noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$
 - 3) Ajout de λ fois la ligne L_j à la ligne L_i noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit les mêmes opérations sur les colonnes.

- **Théorème** : Soit $A \in M_{n,p}(K)$.
 - 1) L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ est obtenue par multiplication de A à gauche par :
 - 2) L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est obtenue par multiplication de A à gauche par :
 - 3) L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est obtenue par multiplication de A à gauche par :

Toutes ces matrices appartiennent à $GL_n(K)$.

De la même manière, en multipliant A à droite par les matrices précédentes de $GL_p(K)$, on obtient les opérations sur les colonnes.

2) Méthode du pivot de Gauss

- **Théorème** : Les opérations élémentaires sur des matrices préservent le rang. De plus le rang d'une matrice est inchangé lorsque l'on supprime une ligne ou colonne nulle.

En pratique, cette méthode est utilisée pour déterminer le rang d'une matrice (Voir poly ci-joint pour la méthode).

3) Méthode du pivot de Gauss pour l'inversibilité d'une matrice

- Voir poly pour plus d'informations

IV) Vocabulaire sur les systèmes linéaires

Soit $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in K^n$. On considère le système linéaire d'inconnue X de K^p : $AX = B$.

- **Définition** : Le système homogène ou sans second membre associé est $AX = 0$
- **Définition** : Le rang du système est celui de la matrice A .
- **Théorème** : L'ensemble des solutions du système homogène est un sev de K^p de dimension $p - \text{rg}(A)$. L'ensemble des solutions du système est un sous espace affine de K^p de direction S , c'est-à-dire un ensemble $X_0 + S$ où X_0 est une solution particulière si elle existe.
- **Définition** : Lorsque A est inversible, ($n = p$) le système est dit de Cramer.

- **Théorème** : Si le système est de Cramer alors il admet une solution unique : $X = A^{-1}B$