

Limites de fonction

Dans tout ce cours, on notera I et J deux intervalles de \mathbb{R}

I) Définitions de la limite d'une fonction

1) Notions topologiques

- **Définition** : On appelle intérieur de I , noté $\overset{\circ}{I}$, l'ensemble I privé de ses bornes.

De même, on appelle adhérence de I , noté \bar{I} , l'ensemble I auquel on ajoute ses bornes.

- **Définition** :
 - Un voisinage d'un réel a est un ensemble qui contient un intervalle de la forme $[a - \alpha, a + \alpha]$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$
 - Un voisinage de $+\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$
 - Un voisinage de $-\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle de la forme $] -\infty, A]$ où $A \in \mathbb{R}$

Remarque : On aurait pu prendre des intervalles ouverts.

On dira qu'une fonction f définie sur I vérifie une propriété au voisinage de $a \in I$ lorsqu'il existe V_a un voisinage de a tel que f vérifie cette propriété sur $I \cap V_a$

2) Limites d'une fonction en un point

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I et $a \in \bar{I}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f admet une limite en a lorsque pour tout voisinage V_l de l , il existe un voisinage V_a tel que :

$$\forall x \in (I \cap V_a), f(x) \in V_l$$

$$\text{Ou } (\forall x \in I, x \in V_a) \Rightarrow f(x) \in V_l$$

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I et $a \in \bar{I}$.
 - Si f possède une limite en a alors elle est unique.
 - Si $a \in I$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- **Définition** : « les 9 limites »

- Si $a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- Si $a \in \mathbb{R}, l = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$$

- Si $a \in \mathbb{R}, l = -\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$$

- Si $a \in -\infty, l \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- Si $a \in -\infty, l = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

- Si $a \in -\infty, l = -\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$$

- Si $a \in +\infty, l \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- Si $a \in +\infty, l = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

- Si $a \in +\infty, l = -\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$$

- **Théorème** : Soit f une fonction de I et $a \in \bar{I}$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$* \text{ Si } a \in \mathbb{R} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = l$$

$$* \text{ Si } l \in \mathbb{R} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - l| = 0$$

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I et $a \in \bar{I}$, $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ alors } f \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

3) Limites à gauche et à droite

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I et $a \in \bar{I}$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$.
Si f est définie sur un voisinage de a à gauche (resp. à droite), on dit que l est limite de f en a à gauche (resp. à droite) lorsque la fonction $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ (resp. $f|_{I \cap]a, +\infty[}$) possède une limite en a . Par unicité de la limite, ces limites sont uniques.

Pour les limites à gauche, on écrit :

- Si $l = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, a - x \leq x < a \Rightarrow f(x) > A$$

- Si $l = -\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, a - x \leq x < a \Rightarrow f(x) < A$$

- Si $l \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, a - x \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I et $a \in \overset{\circ}{I}$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \text{ et } f(a) = l$$

4) Limite d'une fonction en un point intérieur en lequel elle n'est pas définie

- **Définition** : Soit $a \in I$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f admet comme limite l en a lorsque pour tout voisinage V_l de l , il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, x \in V_a \Rightarrow f(x) \in V_l$$

- **Théorème** : Avec ces hypothèses, la limite est unique.
- **Théorème** : Avec ces hypothèses,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

II) Propriétés des limites de fonctions

1) Caractérisation séquentielle

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I , $a \in \overline{I}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Pour toute suite } (x_n) \text{ de } I \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \\ \text{on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \end{cases}$$

Remarque : Ce théorème reste valable pour f définie sur $I \setminus \{a\}$.

2) Opérations sur les limites

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I à valeur dans J , g une fonction définie sur J à valeur dans \mathbb{R} , $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

- Pour la somme et le produit, voir le cours sur les suites.

3) Passage à la limite et ordre

- **Théorème** : Soit f, g deux fonctions définies sur I , $a \in \bar{I}$ et $l, l' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \text{ et } f \leq g \text{ alors } l \leq l' \\ \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } f \leq M \text{ alors } l \leq M \\ \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } f \geq M \text{ alors } l \geq M \end{array}$$

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I , $a \in \bar{I}$ et $l, M \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } l < M \text{ alors } f < M \\ \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } l > M \text{ alors } f > M \end{array}$$

- **Attention** : IL faut bien respecter les inégalités larges et strictes pour ces deux derniers théorèmes : le premier concerne uniquement les inégalités larges et le second les inégalités strictes.

III) Théorèmes d'existence de la limite

Soit f, g, h trois fonctions définies sur I , $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.

- **Théorème des gendarmes** :

$$\text{Si } \begin{cases} g \leq f \leq h \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

- **Théorème de minoration** :

$$\text{Si } \begin{cases} g \leq f \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} g = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

- **Théorème de majoration** :

$$\text{Si } \begin{cases} g \geq f \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} g = -\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

- **Théorème de la limite monotone** :

Soit f une application définie sur I et croissante.

$$\text{Soit } a \in I \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ existent et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$\lim_{\text{Inf } I^+} f$ existe et est finie si f est minorée sinon elle vaut $-\infty$

$\lim_{\text{Sup } I^-} f$ existe et est finie si f est majorée sinon elle vaut $+\infty$

Il existe un théorème analogue pour les fonctions décroissantes.

IV) Extension au cas des fonctions complexes

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexes. On dit que f est bornée si :

$$\exists K > 0 / \forall x \in I, |f(x)| \leq K$$

- **Définition** : Soit $l \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie V_l de \mathbb{C} est voisine de l lorsque V_l contient un disque :

$$D = \{x \in \mathbb{C}, |x - l| \leq \rho \text{ où } \rho \in \mathbb{R}^{*+}\}$$

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexes, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que f admet l comme limite en a lorsque pour tout voisinage V_l de l , il existe un voisinage V_a de

a tel que :

$$\boxed{\forall x \in I, x \in V_a \Rightarrow f(x) \in V_l}$$

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexes, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(l) \\ \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(l) \end{cases}}$$

On peut définir de la même façon la limite à droite ou à gauche et la limite en un point a pour une fonction définie sur $I - \{a\}$.