La dérivabilité

Dans tout ce cours, on notera I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et la notation [a ,b] sous entend que a < b.

Le taux d'accroissement est définie par : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

I) Définitions et propriétés

1) Définitions

- **<u>Définition</u>** : Soit *f* une fonction définie sur I et a $\in$ I. On dit que *f* est dérivable en *a* lorsque le taux d'accroissement existe et est finie.

  Cela équivaut à :

  $$\boxed{\text{f dérivable en a} \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction définie sur I et a $\in$ I. Si *f* est dérivable en *a* alors *f* est continue en *a*.

- **<u>Définition</u>** : Soit *f* une fonction définie sur I et a $\in$ I tel que le taux d'accroissement existe.
  1) Si la limite du taux d'accroissement est finie alors la tangente en *a* est la droite d'équation :
     y = f(a) + f'(a)(x –a).
  2) Si cette limite est infinie alors la tangente est la droite verticale d'équation x = a.

- **<u>Définition</u>** : Soit *f* une fonction définie sur I et a $\in$ I. On dit que *f* est dérivable à gauche (resp. à droite) lorsque $f_{\restriction I \cap]-\infty, a]}$ est dérivable en *a*, c'est-à-dire lorsque la limite du taux d'accroissement existe et est finie.

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I.
Si f est dérivable à gauche en a (resp. à droite) alors la demi droite d'équation $y = f(a) + f'_g(a)(x - a)$ avec $x < a$ est appelée demi tangente à gauche de f en a.

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I et $a \in \overset{\circ}{I}$. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite et que $f'_g(a) = f'_d(a)$.

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.

L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté : D(I, $\mathbb{R}$).

2) Opérations sur la dérivabilité

- **Théorème** : Soit f, g deux fonctions définies sur I et a $\in$ I. On suppose que f et g sont dérivables en a.

• Somme : $\begin{cases} f+g \text{ dérivable en a} \\ (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \end{cases}$
• Produit : $\begin{cases} f\times g \text{ dérivable en a} \\ (f\times g)'(a) = f'(a)\times g(a) + f(a)\times g'(a) \end{cases}$
• Multiplication par λ : $\begin{cases} \lambda f \text{ dérivable en a } (\lambda \in \mathbb{R}) \\ (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \end{cases}$
• Inverse : $\begin{cases} 1/f \text{ dérivable en a si } f(a) \neq 0 \\ \left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = \dfrac{-f'(a)}{f^2(a)} \end{cases}$

- **Théorème** : Soit f une fonction de I dans J et g une fonction définie de J dans $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en a et g dérivable en f(a) alors (g o f) est dérivable en a et :

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = f'(a) \times (g' \circ f)(a)}$$

- **Théorème** : Soit *f* une fonction définie sur I dérivable sur I. Si *f* est bijective de I sur f(I) = J et telle que f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\boxed{(f^{-1})'(a) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(a)}}$$

II) Les grands théorèmes

1) Théorème de Rolle

- **Définition** : Soit *f* une fonction définie sur I et a ∈ I. On dit que *f* admet un maximum (resp. minimum) local en *a* si f(a) est le maximum (resp. minimum) de *f* sur un voisinage de *a*.

- **Théorème** : Soit *f* une fonction définie sur I et $a \in \mathring{I}$. Si *f* est dérivable en *a* et admet un extremum local en *a* alors f'(a) = 0.

  Attention : Toutes les hypothèses doivent être vérifiées en particulier le fait que et $a \in \mathring{I}$!!

- **Théorème de Rolle** : Soit *f* une fonction définie sur [a, b]. Si *f* continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[telle que f(a) = f(b) alors il existe un réel *c* de]a, b[telle que f'(c) = 0.

2) Egalité et inégalité des accroissements finis

- **Théorème** : Soit *f* une fonction définie sur [a, b]. Si *f* continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[alors il existe un réel *c* de]a, b[telle que :

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction définie sur [a, b]. Si *f* est continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[alors.
  1) S'il existe m et M réels tels que $m \leq f' \leq M$ sur]a, b[alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
  2) S'il existe un réel k positif tel que $|f'| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$.

- **<u>Théorème</u>** : Si *f* est dérivable sur I et si sa dérivée est bornée par un réel *k* positif alors *f* est k-lipschitzienne.

3) Constance, monotonie et dérivabilité

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction dérivable sur I.
  1) *f* est <u>constante</u> sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.
  2) *f* est <u>croissante</u> sur I si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle sur I.
  3) *f* est <u>décroissante</u> sur I si et seulement si sa dérivée est négative ou nulle sur I.
  4) *f* est <u>strictement croissante</u> sur I si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle sur I et l'ensemble

     $\{x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non nul ou réduit à un point.
  5) *f* est <u>strictement décroissante</u> sur I si et seulement si sa dérivée est négative ou nulle sur I et l'ensemble

     $\{x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non nul ou réduit à un point.

4) Continuité d'une dérivée

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction définie sur [a, b], continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[.
  1) Si la limite de f'(x) existe (finie ou pas) alors la limite du taux d'accroissement existe et lui est égal.
  2) En particulier, si la limite de f'(x) = l (réelle) alors *f* est dérivable en *a* et f'(a) = l donc *f'* est continue en *a*.

  La réciproque est fausse. On peut avoir *f* dérivable en *a* mais f'(a) peut ne pas avoir de limite en *a*.

5) Théorème des accroissement finis et suites récurrentes

- **Théorème** : Soit f une fonction dérivable sur I telle que f(I) $\subset$ I. On suppose que f possède un point fixe l de I et que $|f'| \leq \eta$ pour un certain $\eta \in [0, 1[$.
  Soit (u_n) une suite définie par u_0 de I et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ alors pour tout n,

  $$\boxed{|u_n - l| \leq \eta^n |u_0 - l|}$$

  En particulier, (u_n) converge vers l.

  Ce théorème est à démontrer à chaque fois dans les exercices.

III) Dérivées successives

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I et k > 0. On dit que f est k-lipschitzienne lorsque :

  $$\boxed{\forall (x, y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|}$$

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est uniformément continue lorsque :

  $$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in I^2, \ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon}$$

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I.
  1) Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I.
  2) Si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue sur I.

- **Théorème de Heine** : Soit a et b deux réels avec a < b. Si f est une fonction continue de [a ,b] dans $\mathbb{R}$ alors elle est uniformément continue sur [a, b].

IV) Extension au cas des fonctions complexes

- **Théorème** : Soit *f* une fonction définie sur I à valeurs complexes et a $\in$ I.
  1) *f* est continue en a si et seulement si Re(a) et Im(a) sont continues en a.
  2) *f* est continue sur I si et seulement si Re(f) et Im(f) sont continues sur I.

Les fonctions continues, uniformément continues et lipschitziennes sont définies de la même manière mais avec $| f(x) – f(y) |$ désignant le module dans le corps des complexes.

L'ensemble des fonctions continues dans le corps des complexes est noté $C(I, \mathbb{C})$

La caractérisation séquentielle de la continuité est toujours vérifiée. Même chose pour els opérations sur la continuité.

<u>En revanche, les grands théorèmes de la partie II ne sont pas valables dans le corps des complexes !</u>