La continuité

Dans tout ce cours, on notera I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$

I) Définitions et propriétés

1) Définitions

- **<u>Définition</u>** : Soit f une fonction définie sur I et a $\in$ I. On dit que f est continue en a lorsque la limite de f quand x tend vers a existe et vaut f(a).

  Cela équivaut à :

  $$\boxed{\text{f continue en a} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon}$$

- **<u>Définition</u>** : Soif f une fonction définie sur I et a $\in$ I. On dit que f est continue à gauche en a lorsque ($f\lceil I \cap]-\infty, a[$) est continue en a, c'est-à-dire que la limite de f quand x tends vers a par valeurs négatives vaut f(a) : $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

- **<u>Théorème</u>** : Soit f une fonction définie sur I et a $\in \mathring{I}$. f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

- **<u>Définition</u>** : Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I. Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

  L'ensemble des fonctions réelles continues sur I est noté C(I, $\mathbb{R}$) ou C^0(I, $\mathbb{R}$).

2) Prolongement par continuité

- **<u>Définition</u>** : Soit f une fonction définie sur I – {a} et a $\in \bar{I} \cap \mathbb{R}$.
  Si la limite de f en a existe et est finie, on dit que f est

prolongeable par continuité en a. Le prolongement de *f* en *a* est définie par :

$$\forall x \in I-\{a\}, \begin{cases} \overline{f}(x)=f(x) \\ \overline{f}(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x) \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur I.

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction définie sur I et a $\in \overline{I}$.
  - Si *f* possède une limite en *a* alors elle est <u>unique</u>.
  - Si a $\in$ I alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

- **<u>Définition</u>** : « les 9 limites »

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction de I et a $\in \overline{I}$, l $\in \overline{\mathbb{R}}$.

$*$ Si a $\in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=l$
$*$ Si l $\in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \lvert f(x)-l\rvert=0$

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction définie sur I et a $\in \overline{I}$, l $\in$ IR.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ alors f est bornée au voisinage de a.

3) Caractérisation séquentielle de la continuité

- **<u>Théorème</u>** : Soit *f* une fonction définie sur I et a $\in$ I. On a l'équivalence suivante :

f continue en a $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Pour toute suite } (x_n) \text{ de réels de I telle que } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a \\ \text{on a } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a) \end{cases}$

- **<u>Théorème</u>** : Equation fonctionnelle des homothéties de IR :
  1) Soit *f* $\in$ C(IR, IR) telle que $\forall (a,y)\in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$

alors f est une homothétie, c'est-à-dire :

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x}$$

2) En d'autre terme, les endomorphismes des groupes (IR, +) qui sont continues sur IR sont les homothéties.

4) Opérations sur la continuité

- **Théorème** : La somme et le produit de deux fonctions continues en un point est une fonction continue en ce même point.
De même, pour l'inverse d'une fonction non nulle en ce point.

- **Théorème** : Soit f une fonction de I dans J et g une fonction de J dans IR et a $\in$ I.
  1) Si f est continue en a et g continue en f(a) alors (g o f) est continue en a.
  2) Si f est continue sur I et g est continue sur J alors (g o f) est continue sur I.

II) Les grands théorèmes

1) Théorème des valeurs intermédiaires

- **Définition** : Un intervalle de IR est une partie de I vérifiant :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R},\ x < z < y \Rightarrow z \in I}$$

- **Théorème** : L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle. De plus, si f est continue de I dans IR, alors pour tout a,b de I et pour tout y compris entre f(a) et f(b), il existe un x compris entre a et b tel que f(x) = y.

  Attention : Toutes les hypothèses doivent être vérifiées en particulier le fait que I est un INTERVALLE !

2) Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

- **Corollaire** : Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et a,b $\in \overline{\mathbb{R}}$ avec a < b, on a :

  - Si f est strictement croissante :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Si } I=[a,b] \text{ alors } f(I)=[f(a),f(b)] \\
\text{Si } I=[a,b[\text{ alors } f(I)=[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[\\
\text{Si } I=]a,b] \text{ alors } f(I)=]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)] \\
\text{Si } I=]a,b[\text{ alors } f(I)=]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[
\end{array}}$$

  - Si f est strictement décroissante :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Si } I=[a,b] \text{ alors } f(I)=[f(b),f(a)] \\
\text{Si } I=[a,b[\text{ alors } f(I)=]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)] \\
\text{Si } I=]a,b] \text{ alors } f(I)=[f(a),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[\\
\text{Si } I=]a,b[\text{ alors } f(I)=]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[
\end{array}}$$

3) Image d'un segment par une fonction continue

- **Théorème** : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. De plus, soit a, b $\in \mathbb{R}$ tel que a < b et f une fonction continue de [a ,b] dans $\mathbb{R}$ alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire un maximum et un minimum.

- **Lemme** : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite (x_n) de A admettant pour limite sup(A).

4) Théorème de la bijection

- **Théorème** : Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et J = f(I).
On a f bijective si et seulement si f est strictement monotone.
Dans ce cas, f^{-1} est strictement monotone de même sens que f et continue sur J.

III) Fonctions de Lipschitz et continuité uniforme

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I et k > 0. On dit que f est k-lipschitzienne lorsque :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ \ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|}$$

- **Définition** : Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est uniformément continue lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \forall (x,y) \in I^2,\ \ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon}$$

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I.
  1) Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I.
  2) Si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue sur I.

- **Théorème de Heine** : Soit a et b deux réels avec a < b. Si f est une fonction continue de [a ,b] dans $\mathbb{R}$ alors elle est uniformément continue sur [a, b].

IV) Extension au cas des fonctions complexes

- **Théorème** : Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexes et a $\in$ I.
  1) f est continue en a si et seulement si Re(a) et Im(a) sont continues en a.
  2) f est continue sur I si et seulement si Re(f) et Im(f) sont continues sur I.

Les fonctions continues, uniformément continues et lipschitziennes sont définies de la même manière mais avec $| f(x) - f(y) |$ désignant le module dans le corps des complexes.

L'ensemble des fonctions continues dans le corps des complexes est noté $C(I, \mathbb{C})$

La caractérisation séquentielle de la continuité est toujours vérifiée. Même chose pour els opérations sur la continuité.

<u>En revanche, les grands théorèmes de la partie II ne sont pas valables dans le corps des complexes !</u>