Les espaces vectoriels

Dans tout ce cours,

- K désigne ℝ ou ℂ.
- LCI désigne la loi de composition interne
- LCE désigne la loi de composition externe
- K-ev désigne un K espace vectoriel
- s.e.v désigne un sous espace vectoriel
- CL désigne une combinaison linéaire

I) Espaces vectoriels, sous espaces

1) Définitions

- Une loi de composition « externe » sur E (loi de composition externe) est une application de K x E dans E. On la note « point » : •

  « • » est une LCE si, $\boxed{\forall(\lambda, x)\in K\times E,\ \lambda \bullet x\in E}$

  <u>Remarque</u> : Pour un ensemble muni d'une LCE, les éléments de K sont appelés « <u>scalaire</u> ». On notera toujours les scalaires avant les éléments de E.

- **<u>Structure de K-ev</u>** : Soit E un espace vectoriel. (E, +, •) est un K-ev si :
  1) (E, +) est un groupe commutatif.
  2) La loi externe vérifie les quatre axiomes :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ \forall(\lambda,\mu)\in K^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\bullet x=\lambda\bullet x+\mu\bullet x \\ 2)\ \ \forall(x,y)\in E^2,\ \forall\lambda\in K,\ \lambda\bullet(x+y)=\lambda\bullet x+\lambda\bullet y \\ 3)\ \ \forall(\lambda,\mu)\in K^2,\ \forall x\in E,\ \lambda\bullet(\mu\bullet x)=(\lambda\bullet\mu)\bullet x \\ 4)\ \ \forall x\in E,\ 1\bullet x=x \end{array}}$$

Dans ce cas, les éléments de E sont appelés vecteurs. L'élément neutre pour l'addition est appelé vecteur nul et est noté 0_E.

2) Premiers espaces vectoriels de référence

- K^n c'est-à-dire ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) est un K-ev avec $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) / (x_1, \ldots, x_n) \in K^n\}$. On démontre facilement que (K^n, +) est un groupe commutatif avec $0_K = (0, 0, \ldots, 0)$ comme élément neutre et que la loi externe vérifie les quatre axiomes cités ci haut.

  Remarque : Si K = $\mathbb{R}$ et si n = 2 ou 3 alors on retrouve $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ identifié à l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace.

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites d'entiers. On montre également facilement que ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, +, $\bullet$) est un K-ev avec la suite nulle (constante à 0) comme élément neutre.

- $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{C}$-ev ou un $\mathbb{R}$-ev avec
  - « + » addition dans les complexes
  - « $\bullet$ » la multiplication dans les complexes ➔ $\mathbb{C}$-ev

  Si « $\bullet$ » est la multiplication par les réels alors ($\mathbb{C}$, +, $\bullet$) est un $\mathbb{R}$-ev.

- Ensemble des applications de X dans E avec X un ensemble quelconque et E un K-ev.

  Si $f : X \to E$ et $g : X \to E$ alors :

  $$\begin{aligned} f+g : X &\to E \\ t &\mapsto f(t)+g(t) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \forall \lambda \in K,\ \lambda \bullet f : X &\to E \\ t &\mapsto \lambda \bullet f(t) \end{aligned}$$

- Produit cartésien de deux espaces vectoriels :
  Soit (E_1, +, $\bullet$), (E_2, +, $\bullet$) deux K-ev alors on peut munir $E_1 \times E_2$ d'une structure de K-ev : $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in E_1 \times E_2$

3) Manipulation des vecteurs

- Soit (E, +, •) un K-ev alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x\in E,\ 0\bullet x=0_E\\ \forall\lambda\in K,\ \lambda\bullet 0_E=0_E\\ \forall\lambda\in K,\ \forall x\in E,\ \lambda\bullet x=0_E\Leftrightarrow\lambda=0 \text{ ou } x=0_E\\ \forall x\in E,\ -x=(-1)\bullet x\\ \forall(\lambda,\mu)\in K^2,\ \forall(x,y)\in E^2,\ \lambda\bullet(x-y)=\lambda\bullet x-\lambda\bullet y\\ \forall x\in E,\ \forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}^*,\ x+x+\ldots+x=n\bullet x\end{array}}$$

- **<u>Combinaison linéaire</u>** : Soit $(u_1, \ldots, u_p) \in (E)^p$, une combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_p)$ est un vecteur de la forme :

$$\boxed{v=\lambda_1\bullet u_1+\ldots+\lambda_p\bullet u_p \quad \text{avec } (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in K^p}$$

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires obtenues à partir de $(u_1, \ldots, u_p)$ est noté $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ « vectoriel de $(u_1, \ldots, u_p)$ ». Donc si $v \in E$ alors

$$\boxed{v\in Vect(u_1,\ldots,u_p)\Leftrightarrow\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in K^p\,/\,v=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\bullet u_i}$$

4) Sous espaces vectoriels

- Soit (E, +, •) un K-ev. Un sous espace vectoriel de E est un ensemble F tel que :
  1) $F \subset E$
  2) $0_E \in F$
  3) F est stable par CL.

<u>Remarque</u> : En fait, la condition 2 est « $F \neq \varnothing$ » mais tout s.e.v de E contient 0_E ! La stabilité par CL est équivalente à la

stabilité par + et $\bullet$. Si F est un s.e.v de E alors (F, +, $\bullet$) est encore un K-ev avec $0_F = 0_E$.

- Soit $(u_1, \ldots, u_p) \in (E)^p$, Vect($u_1, \ldots, u_p$) est un s.e.v de E. On l'appelle « s.e.v <u>engendré</u> par ($u_1, \ldots, u_p$) ». Si F est un s.e.v, on dit que la famille ($u_1, \ldots, u_p$) de vecteur de F est une <u>famille génératrice</u> de F si F = Vect($u_1, \ldots, u_p$).

II) Applications linéaires

1) Définitions

- Soient E et F deux K-ev et f une application de E dans F. f est linéaire si elle vérifie :

$$\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in K^2,\ f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)}$$

Deux caractéristiques équivalentes à la définition ci haut :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall (x,y)\in E^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)\\ \forall x\in E,\ \forall\lambda\in K,\ f(\lambda.x)=\lambda.f(x)\end{array}}$$

Ou $\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ \forall\lambda\in K,\ f(\lambda.x+y)=\lambda.f(x)+f(y)}$

- Si f est une application linéaire de E dans F alors on a toujours :

$$\boxed{f(O_E)=O_F}$$

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté L(E, F). Cet ensemble [L(E, F), +, $\bullet$] est un K-ev de référence.

- Soient E et F des K-ev.
  - Un <u>endomorphisme</u> de E est une application linéaire notée L(E) de E dans E.
  - Un <u>isomorphisme</u> de E vers F est une application linéaire bijective de E dans F.
  - Un <u>automorphisme</u> est un endomorphisme bijectif de E.

- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K.

2) Noyau et image d'une application linéaire

- Soient f une application linéaire de E dans F :

$$Ker(f) = f^{-1}(\{O_F\}) = \{x \in E \,/\, f(x) = O_F\}$$
$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{\forall y \in F, y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists x \in E \,/\, y = f(x)\}$$

$$Ker(f) = E \Leftrightarrow f \text{ est l'application nulle de E vers F}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{O_F\} \Leftrightarrow f \text{ est l'application nulle de E vers F}$$

- Soit f une application linéaire de E dans F :
  - Ker(f) est un s.e.v de E.
  - Im(f) est un s.e.v de F.
  - Si F_1 est un s.e.v de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un s.e.v de F.
  - Si E_1 est un s.e.v de E alors $f(E_1)$ est un s.e.v de E.

- Soit f une application linéaire de E dans F :
  - f est injective si et seulement si Ker(f)= $\{0_E\}$
  - f est surjective si et seulement si Im(f) = F

III) Composition d'applications linéaires - Algèbre

1) Composition d'applications linéaires

- La composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

- Soit E, F et G des K-ev :

$$\forall g \in L(F,G), \forall (f_1, f_2) \in L(E,F)^2,$$
$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall (g_1, g_2) \in L(F,G)^2, \forall f \in L(E,F), \\ (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall \alpha \in K, \forall g \in L(F,G), \forall f \in L(E,F), \\ \alpha.(g \circ f) = (\alpha.g) \circ f = g \circ (\alpha.f)\end{array}}$$

- **<u>Isomorphisme</u>** :
  - Si f est un isomorphisme de E vers F alors f^{-1} est un isomorphisme de F vers E.
  - La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

- L'ensemble des automorphismes de E est un groupe non commutatif pour la loi $\circ$ avec Id_E comme élément neutre. On note ce groupe : GL(E) « groupe linéaire de E ».

- Si E et F sont des K-ev alors E et F sont dits « isomorphes » s'il existe un isomorphisme de E vers F ou de F vers E.

2) Structure de K-Algèbre

- Soit A un ensemble muni de trois lois (+, * et $\bullet$).
  (A, +, $\bullet$, *) est une K-Algèbre si :
  - (A, +, $\bullet$) est un K-ev (+ est une LCI et $\bullet$ une LCE)
  - (A, +, *) est un anneau (* est une LCI)
  - Elle respecte la « fluidité des scalaires » :

$$\boxed{\forall \alpha \in K, \forall (x, y) \in A^2,\ \alpha.(x * y) = (\alpha.x) * y = x * (\alpha.y)}$$

- B est une Sous-Algèbre de (A, +, $\bullet$, *) si :
  - $B \subset A$
  - B est un s.e.v de A
  - B est stable par *
  - $1_A \in B$

- <u>Morphisme d'Algèbre</u> : Soient (A, +, $\bullet$, *) et (A', +, $\bullet$, *) deux K-Algèbre . Soit $f : A \to A'$ alors f est un morphisme d'Algèbre si :

- f est linéaire de A dans A'

- $$\forall (x,y)\in A^2, f(x*y)=f(x)\wedge f(y) \quad \text{et} \quad f(1_A)=1_{A'}$$

3) Algèbre L(E)

- On sait que [L(E), +, •, ∘] est une K-Algèbre non commutative si :
  - $0_{L(E)}$ est l'application nulle (neutre pour +)
  - Id_E : neutre pour ∘

- **<u>Calcul dans une Algèbre</u>** :

$$\forall (f,g)\in L(E)^2, \text{ et si } f\circ g=g\circ f$$
$$\forall n\in \mathbb{N},\ (f+g)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^k\circ g^{n-k}$$

$$\forall (f,g)\in L(E)^2, \text{ et si } f\circ g=g\circ f$$
$$\forall n\in \mathbb{N},\ (f^n-g^n)=(f-g)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k\circ g^{n-1-k}\right)$$

$$\forall (f,g)\in L(E)^2, \text{ et si } f\circ g=g\circ f$$
$$\forall p\in \mathbb{N},\ (f^{2p+1}-g^{2p+1})=(f-g)\circ\left(\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k f^k\circ g^{2p-k}\right)$$

$$\forall (f,g)\in L(E)^2, \text{ et si f est bijective}$$
$$\forall n\in \mathbb{N},\ (f^{-1}\circ g\circ f)^n=f^{-1}\circ g^n\circ f$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall (f,g)\in L(E)^2,\ \text{et si } f\circ g = g\circ f \\ \forall n\in\mathbb{N},\ (g\circ f)^n = g^n\circ f^n\end{array}}$$

4) Noyaux, images et composée d'Algèbre

- Soit *f* une application de L(E, F) et g une application de L(F, G) alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}Ker(f)\subset Ker(g\circ f)\\ \mathrm{Im}(g\circ f)\subset \mathrm{Im}(g)\end{array}}$$

- Soit *f* une application de L(E, F) et g une application de L(F, G) alors :

$$\boxed{g\circ f = 0_{L(E,G)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f)\subset Ker(g)}$$

- Soit *u* une application de L(E, F), φ un groupe linéaire de E et Ψ un groupe linéaire de F alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}Ker(\Psi\circ u) = Ker(u)\\ \mathrm{Im}(u\circ\varphi) = \mathrm{Im}(u)\end{array}}$$

- Soit *f* une application de L(E, F) et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice de E alors :

$$\boxed{Vect[f(u_1),\ldots,f(u_p)] = \mathrm{Im}(f)}$$

IV) Propriétés de familles de vecteurs

1) Familles génératrices

- Si E est un K-ev alors une famille $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$\boxed{\begin{array}{l} Vect(u_1,\dots,u_p)=E \\ \forall x\in E,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in K^p \,/\, v=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\times u_i \end{array}}$$

- Si $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ alors :

$$\boxed{Vect(u_1,\dots,u_p,0_E)=Vect(u_1,\dots,u_p)}$$

- Si $(u, v) \in E^2$ alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} Vect(u,u)=Vect(u) \\ Vect(u,\lambda u)=Vect(u) \\ Vect(u,v,\lambda u+\mu v)=Vect(u,v) \end{array}}$$

- Plus généralement, si $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ alors il existe un k de $[|1, p|]$ tel que u_k est une combinaison linéaire des autres.

  ➔➔ Dans une famille, un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne sert à rien.

- Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ alors
  ** Si F est un s.e.v de E alors $\boxed{Vect(u_1,\dots,u_p)\subset F}$

  ** Si $(v_1, \dots, v_q) \in E^q$ alors $\boxed{Vect(v_1,\dots,v_q)\subset Vect(u_1,\dots,u_p)}$

- Soit F un s.e.v de E et $(u_1, \dots, u_p) \in F^p$ une famille génératrice de F. Soit $v \in F$ alors $(u_1, \dots, u_p, v)$ est encore une famille génératrice de F.

2) Familles libres et familles liées

- Soit E un K-ev et soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ alors :
  ** La famille est $(u_1, \dots, u_n)$ libre dans E si :

$$\boxed{\forall(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in K^n,(\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_n u_n=0_E)}$$

On dit que les vecteurs $u_1 \ldots u_n$ sont <u>indépendants</u>.

** Si ce n'est pas une famille libre alors c'est une <u>famille liée</u> :

$$\boxed{\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\neq(0,\ldots,0)\in K^n,(\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_n u_n=0_E)}$$

- Soit $u \in E$. La famille (u) est libre si et seulement si $\boxed{u \neq 0_E}$
- Soit $(a, v) \in \mathbb{R}^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si u et v sont <u>non colinéaires</u>.

- Toue famille contenant le <u>vecteur nul</u> est liée. Une famille libre ne contient jamais le vecteur nul mais la réciproque est fausse !

- Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est une <u>combinaison linéaire</u> des autres.

- Toute sous famille d'une famille libre est encore libre.

- Soit F un s.e.v de E. Toute famille libre dans F est libre dans E. Donc si $(u_1, \ldots, u_p) \in F^p$ est libre dans F alors elle est libre dans E.

- Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Soit $v \in E$ alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}(u_1,\ldots,u_p,v)\text{ libre}\Leftrightarrow v\notin Vect(u_1,\ldots,u_p)\\(u_1,\ldots,u_p,v)\text{ liée}\Leftrightarrow v\in Vect(u_1,\ldots,u_p)\end{array}}$$

3) Bases

- Une famille $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ est une base si elle est <u>libre</u> et <u>génératrice</u> dans E.

- Soit E un K-ev et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base si et seulement si

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \,/\, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times u_i}$$

C'est-à-dire que tout élément de E se décompose de manière unique. Dans ce cas, les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $(u_1, \dots, u_n)$.

- Soit E admettant une base finie $(u_1, \dots, u_n)$. Pour $x \in [|1, n|]$, soit p_i l'application de E dans K qui a un vecteur x de E associe sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans $(u_1, \dots, u_n)$ alors p_i est bien définie et p_i est une forme linéaire sur E.

4) Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

- Soit E un K-ev admettant une base finie $(u_1, \dots, u_n)$ et f une application linéaire de E dans F. Soit $f \in L(E, F)$ alors :
  ** f est injective ssi $[f(u_1), \dots, f(u_n)]$ est libre dans F.
  ** f est surjective ssi $[f(u_1), \dots, f(u_n)]$ est liée dans F.
  ** f est bijective ssi $[f(u_1), \dots, f(u_n)]$ est une base dans F.

- Soit $f \in L(E, F)$.
  ** f est injective si et seulement si elle transforme toute famille libre en famille libre.
  ** Si f est surjective alors elle transforme toute famille génératrice de E en une famille génératrice de F. Si f transforme une famille génératrice donnée de E en familles génératrices de F alors elle est surjective.
  ** Si f est bijective alors elle transforme toute base de E en une base de F. Si f transforme une base donnée de E en bases de F alors elle est bijective.

5) Construction d'une application linéaire

- Soit E et F deux K-ev. On suppose que E admet une base finie $(u_1, \dots, u_n)$ alors :

$$\boxed{\forall (y_1, \dots, y_n) \in F^n, \exists! f \in L(E, F) \,/\, f(u_1) = y_1 \ \dots\ f(u_n) = y_n}$$

Remarque : $(y_1, \ldots, y_n)$ est une famille quelconque de F. Si on choisit $(y_1, \ldots, y_n)$ libre dans F alors f est injective. Si on choisit $(y_1, \ldots, y_n)$ génératrice dans F alors f est surjective.