

Le calcul matriciel

Dans tout ce cours,

- K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou 0 si $i \neq j$ (symbole de Kronecker)

I) Espaces vectoriels $M_{n,p}(K)$

1) Rappel

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

$$B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

$$A + B = (a_{i,j}) + (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

2) Matrices particulières

- Une matrice carrée de format (n,n) est notée : $M_n(K)$
- La matrice nulle de format (n,p) est notée : $0_{(n,p)} = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = 0$ pour tout i et j de $[1, n] \times [1, p]$
- La matrice élémentaire de format (n,p) . Soit $(i, j) \in [1, n] \times [1, p]$ fixé alors :

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,p}(K)$$

Dans $M_{n,p}(K)$, il y a $n.p$ matrices élémentaires.

Famille des matrices élémentaires :

$(E_{1,1}; E_{1,2}; \dots; E_{1,p}; E_{2,1}; \dots; E_{2,p}; E_{n,1}; \dots; E_{n,p})$

Pour i et j fixés,

$$E_{i,j} = (a_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq p} = \begin{cases} a_{k,l} = 1 \\ a_{k,l} = 0 \text{ si } k \neq i \text{ ou } l \neq j \end{cases}$$

Donc, $\forall (k,l) \in [|1, n|] \times [|1, p|]$ le coefficient d'indice (k,l) est : $a_{k,l} = \delta_{i,k} \times \delta_{j,l}$

Dans $M_n(K)$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, les coefficients $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ sont les **coefficients diagonaux**.

- **Matrice diagonale :**

A est une matrice diagonale si ses coefficients en dehors de la diagonale sont tous nuls.

$$\forall (i,j) \in [|1, n|], i \neq j \Rightarrow (a_{i,j}) = 0$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Autres exemples :

$0_{(n,n)}$ est diagonale.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonale}$$

Les coefficients de I_n sont les $(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \\ a_{i,j} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Donc, $(a_{i,j}) = \delta_{i,j}$

- **Matrice scalaire :**

A est une matrice scalaire si A est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_n$$

I_n et $0_{(n,n)}$ sont scalaires. Les matrices scalaires sont les matrices de la forme αI_n pour tout α scalaire.

- **Matrice triangulaire :**

A est triangulaire supérieure si $A \in M_n(K)$ avec des coefficients nuls sous la diagonale.

$\forall (i,j) \in [1,n]^2, i > j \Rightarrow (a_{i,j}) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \# \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

A est triangulaire inférieure si $A \in M_n(K)$ avec des coefficients nuls sur la diagonale.

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, i < j \Rightarrow (a_{i, j}) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ \# & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

3) Structure de K-ev de $M_{n,p}(K)$

- $(M_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un K-ev de vecteur nul $0_{(n,p)}$
- La famille des matrices élémentaires de format (n,p) est une base de $M_{n,p}(K)$. c'est la base canonique.

II) Produit matriciel

1) Définition

Soit $A = (a_{i, j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in M_{n, p}(K)$

$B = (b_{j, k})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq q} \in M_{p, q}(K)$

- alors $AB = (c_{i, k})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq q} \in M_{n, q}(K)$

$\forall (i, k) \in [1, n] \times [1, q]$, $(c_{i, k})$ est le produit scalaire

- de la ième ligne de A par la kème colonne de B

$$(c_{i, k}) = \sum_{j=1}^p a_{i, j} \times b_{j, k}$$

- Remarques :
 - Le produit matriciel n'est **pas commutatif**. Si AB est définie alors BA n'est pas toujours définie.

- $A^2 = A \times A$ n'est défini que si A est une matrice carrée.
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ seulement **si $AB = BA$** sinon $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
- On peut avoir $AB = 0$ (matrice nulle) avec A non nul ou B non nul donc le produit matriciel n'est pas **intègre**.

2) Structure d'Algèbre de $M_n(K)$

- Le produit matriciel n'est pas une LCI dans $M_{n,p}(K)$ si n différent de p. c'est une LCI dans les matrices carrées.
- Associativité (avec respect des formats) :
Si $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{p,q}(K)$ et $C \in M_{q,r}(K)$ alors :
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
- Distributivité à gauche :
Si $A \in M_{n,p}(K)$ et $B, C \in M_{p,q}(K)$ alors
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
- Distributivité à droite :
Si $A, B \in M_{n,p}(K)$ et $C \in M_{p,q}(K)$ alors
$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$
- Matrice identité :
Si $A, B \in M_{n,p}(K)$ alors $A \times I_p = A$ et $I_n \times A = A$
- Sans $M_n(K)$, x est une LCI et $(M_n(K), +, x)$ est un anneau non commutatif avec I_n comme élément neutre.

3) Matrices inversibles

- Définition : Soit $A \in M_n(K)$, A est inversible si :

$$\exists B \in M_n(K) / AB = BA = I_n$$

Remarque : Cette notion n'a de sens que pour des matrices carrées. De plus, le produit matriciel n'est pas commutatif, il faut donc vérifier la relation dans les deux sens. De même, on ne peut pas parler de A^{-1} si la matrice A n'est pas inversible.

- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$ est un groupe pour \times (groupe commutatif). On le note $GL_n(K)$ « groupe linéaire des matrices carrées de format n ». Donc,

$$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) / A \text{ est inversible}\}$$

Si A et $A' \in GL_n(K)$ alors $AA' \in GL_n(K)$ et,

$$(AA')^{-1} = (A')^{-1} \times A^{-1}$$

Conséquence : $A = B \Rightarrow AC = BC$ (l'équivalence est vraie seulement si C est inversible).

- Si $A \in M_n(K)$ et s'il existe B telle que $AB = I_n$ alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre. La vérification $BA = I_n$ n'est pas nécessaire. (*proposition admise pour l'instant*)
- **Théorème** : Soit $A \in M_n(K)$,

$$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \forall y \in M_{n,1}(K), \exists ! X \in M_{n,1}(K) / AX = Y$$

Ce théorème est très utile pour la recherche d'inverse.

4) Matrices diagonales et triangulaires

- Matrices diagonales : Soit D, D' deux matrices diagonales alors DD' est une matrice diagonale et :

$$DD' = \begin{pmatrix} d_1 d'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n d'_n \end{pmatrix}$$

Remarque : En particulier, deux matrices diagonales commutent toujours. On note $D_n(K)$, l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(K)$. C'est une Sous-Algèbre de $M_n(K)$.

De plus, D est inversible si ses coefficients sont tous non nuls :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

- Matrices triangulaires : Le produit de deux matrices triangulaires T et T' supérieures est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux de TT' sont mes produits des coefficients diagonaux de T et de T'.

$$TT' = \begin{pmatrix} t_1 t'_1 & & \# \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & t_n t'_n \end{pmatrix}$$

L'ensemble $T_n^+(K)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et c'est une Sous-Algèbre non commutative de $M_n(K)$.

De même pour $T_n^-(K)$, c'est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures et c'est une Sous-Algèbre non commutative de $M_n(K)$.

Si T est une matrice triangulaire alors T est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, si $T \in T_n^+(K)$ alors $T^{-1} \in T_n^+(K)$ et les coefficients diagonaux de T^{-1} sont les inverses de ceux de T.

III) Autre opérations

1) Transposition

- Soit $A \in M_{n,p}(K)$ tel que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ alors ${}^t A$ est la matrice de $M_{p,n}(K)$ dont les coefficients sont les $(a_{j,i})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$

- La transposition est une application linéaire de $M_{n,p}(K)$ dans $M_{p,n}(K)$ et :

$$\forall (A, B) \in (M_{n,p}(K))^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t(A) + \mu {}^t(B)$$

Remarque : En particulier, pour $p = n$, la transposition est **involutive**.

- $\forall A \in M_{n,p}(K), \forall B \in M_{p,q}(K), {}^t(AB) = {}^t(B) + {}^t(A)$

$$\forall A \in M_n(K), \text{ Si } A \text{ est inversible alors } {}^tA \text{ est inversible et :}$$

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

- Définition : Soit $M \in M_n(K)$. On dit que M est symétrique si ${}^tM = M$. On dit que M est antisymétrique si ${}^tM = -M$.

On note $S_n(K)$, l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

- $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont des sous espaces vectoriels de $M_n(K)$

2) Trace d'une matrice carrée

- Définition : Si A est une matrice carrée de taille n , on note la trace de A : $tr(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Exemple : $tr(0) = 0$ et $tr(I_n) = n$

- tr est une forme linéaire de $M_n(K)$ avec n fixé.

$$\forall (A, B) \in (M_{n,p}(K))^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, tr(\lambda A + \mu B) = \lambda tr(A) + \mu tr(B)$$

- $\forall A \in M_n(K), \text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$
- $\forall (A, B) \in [M_n(K)]^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

IV) Matrices et applications linéaires

Soit E un K -ev muni d'une base finie $B = (u_1, \dots, u_p)$

1) Matrice associée à une famille de vecteurs dans B

- Soit (x_1, \dots, x_q) une famille de vecteurs de E . la matrice associée à (x_1, \dots, x_q) dans la base B est la matrice de $M_{n,p}(K)$ présentant dans sa j ème colonne, les coordonnées dans la base B .

Autrement dit, $\exists!(a_{i,j}, \dots, a_{p,j}) / x_j = a_{1,j}u_1 + \dots + a_{p,j}u_p$

$$\text{On le note : } \text{mat}_B(x_1, \dots, x_q) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Remarques : Pour une famille (x_1, \dots, x_q) donnée, il y a une unique matrice associée à (x_1, \dots, x_q) relativement à une base B donnée.

Si $A \in M_{n,p}(K)$, il y a une unique famille (x_1, \dots, x_q) associée à A relativement à une base B donnée.

Sans préciser la base, une infinité de matrices (de format (p,q)) associées de (x_1, \dots, x_q) une infinité de familles associées à A .

L'ordre des vecteurs dans (x_1, \dots, x_q) impose l'ordre des colonnes de la matrice associée dans B .

Dans K^p , la matrice associée à (x_1, \dots, x_q) relativement à une base canonique de K^p est la matrice canoniquement associée à (x_1, \dots, x_q) .

- Soit $(x_1, \dots, x_q) \in E^q$. Soit $A = \text{mat}_B(x_1, \dots, x_q) \in M_{p,q}(K)$.

Soit $Z = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{pmatrix} \in M_{q,1}(K)$ alors :

$$AZ = \text{mat}_B(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_q x_q)$$

- Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de E.
Soit $A = \text{mat}_B(x_1, \dots, x_p)$.
 - A est inversible si et seulement si (x_1, \dots, x_p) est une base de E.
 - Sans ce cas, A^{-1} est la matrice associée à (u_1, \dots, u_p) dans la base (x_1, \dots, x_p) .

2) Matrice associée à une application linéaire de E dans F

On garde $B = (u_1, \dots, u_p)$ une base de E.

Soit F un K-ev muni d'une base finie $C = (v_1, \dots, v_n)$

- **Définition** : Soit f une application linéaire de E dans F. La matrice associée à f relativement aux bases B et C est la matrice de la famille $[f(u_1), \dots, f(u_p)]$ de la base de C.

Autrement dit, $\text{mat}_{B,C}(f) \in M_{n,p}(K)$ et

$$\text{mat}_{B,C}(f) = \text{mat}_C[f(u_1), \dots, f(u_p)]$$

- **Théorème fondamental** : Si B est une base fixée (à p vecteurs) de E et C une base de F (à n vecteurs) alors :
 - 1) Pour toute application linéaire de E dans F, il existe une unique matrice associée à f dans les bases B et C.
 - 2) Réciproquement, pour toute matrice A de format (n, p), il existe une unique application linéaire de E dans F tel que $A = \text{mat}_{B,C}(f)$ et pour tout x de E, si $X = \text{mat}_B(x) \in M_{p,1}(K)$ et $Y = \text{mat}_C[f(x)] \in M_{n,1}(K)$ alors $Y = AX$.

$$\forall (f, g) \in L(E, F)^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2,$$

- $mat_{B, C}(\lambda f + \mu g) = \lambda \times mat_{B, C}(f) + \mu \times mat_{B, C}(g)$

- Soit G un K-ev muni d'une base finie $D = (w_1, \dots, w_n)$ alors :

$$\forall f \in L(E, F), \forall g \in L(F, G),$$

$$mat_{B, D}(g \circ f) = mat_{C, D}(g) \times mat_{B, C}(f)$$

- Si $n = p$ et si f est une application linéaire de E dans F alors f est bijective si et seulement si $A = mat_{B, C}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $A^{-1} = mat_{C, B}(f^{-1})$

3) Matrice associée à une famille de formes linéaires

- **Définition** : Soit E muni de $B = (u_1, \dots, u_p)$ et $C = (C_1, \dots, C_s)$ une famille de s formes linéaires sur E alors $mat_B(C_1, \dots, C_s)$ est la matrice de format (s, p) telle que $\forall (i, j) \in [1, s] \times [1, p]$, le coefficient d'indice (i, j) de A est $C_i(u_j) \in K$.