Nombres complexes

I) Propriétés des nombres complexes

1) Parties réelles et imaginaires

- Dans l'ensemble des complexes, noté $\mathbb{C}$, l'addition est associative et commutative. Elle possède un élément neutre (0) et un tout nombre possède un opposé. On dit que ($\mathbb{C}$, +) est un **groupe commutatif**.
- Dans l'ensemble des complexes, la multiplication est associative et commutative. Elle possède un élément neutre (1) et tout nombre différent de 0 admet un inverse. On dit que ($\mathbb{C}$, +, x) est un **corps commutatif**.
- Attention : Dans l'ensemble des complexes, il n'y a pas d'ordre (pas d'égalité entre nombres complexes).
- $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+bi=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$
  $$\forall (a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4,\ a+bi=a'+b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$
- $$\forall z \in \mathbb{C},\ (z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {z_1}^{n-k} \times {z_2}^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {z_1}^{k} \times {z_2}^{n-k}$$
- $$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 1,\ \sum_{k=p}^{n} z^k = z^p \times \frac{1-z^{n-p+1}}{1-z}$$
  $$\forall z \in \mathbb{C},\ z=1,\ \sum_{k=p}^{n} z^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$$

- $$\forall z \in \mathbb{C},\ z^n - 1 = (z-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right) = (z-1)(1+z+\ldots+z^{n-1})$$
  $$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k \times z_2^{n-1-k}\right)$$

2) Complexes conjugués

- $$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$
  $$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$
  $$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{z} \neq 0,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$
  $$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{z}' \neq 0,\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$
  $$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \overline{\lambda \times z} = \lambda \times \overline{z}$$
  $$\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$
- $$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$
  $$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$$
- $$z + \overline{z} = 2 \times \Re e(z)$$
  $$z - \overline{z} = 2i \times \mathrm{I}m(z)$$

3) Module d'un nombre complexe

- $$\boxed{\begin{array}{l} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |z|^2 = z \times \overline{z} \end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{C},\ |\overline{z}| = |z| \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z \times z'| = |z| \times |z'| \\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z^n| = |z|^n \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z' \neq 0,\ \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l} \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| \leq |z| + |z'| \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \big||z| - |z'|\big| \leq |z+z'| \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \big||z| - |z'|\big| \leq |z-z'| \leq |z| + |z'| \end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l} \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, z' \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}^* / z' = kz \end{cases} \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \begin{cases} z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+ \\ \overline{z}z' \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \end{array}}$$

- $\boxed{\text{Soit } U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}}$

- L'ensemble U est stable par produit et par passage à l'inverse. U est donc un **groupe commutatif**.

4) Racines carrées complexes

- $$\forall a \in \mathbb{R}^{*+},\ z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{a} \\ z = -\sqrt{a} \end{cases}$$
  $$Si\ a = 0,\ z^2 = a \Leftrightarrow z = 0$$
  $$\forall a \in \mathbb{R}^{*-},\ z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} z = i\sqrt{-a} \\ z = -i\sqrt{-a} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \forall a \in \mathbb{C}^* \\ \alpha = \mathrm{Re}(a),\ (x+yi)^2 = a \Leftrightarrow \\ \beta = \mathrm{Im}(a) \end{cases} \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = |a| \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

- $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, a $\neq 0$, on a une équation du 2nd degrè dans $\mathbb{R}$

- $$\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ \text{a} \neq 0,\ \text{si } \Delta = 0,\ az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$$
  $$\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ \text{a} \neq 0,\ \text{si } \Delta \neq 0,\ az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \end{cases}$$
  avec δ et -δ les racines carrées complexes de Δ

II) Exponentielle complexe

1) Argument d'un complexe non nul

- $$\forall z \in U,\ \exists! \theta \in [0, 2\pi[\ \ / \ \begin{cases} \cos\theta = \mathrm{Re}(z) \\ \sin\theta = \mathrm{Im}(z) \end{cases}$$

- $$\arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \qquad \arg(1) = 0[2\pi]$$
  $$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \qquad \arg(-1) = \pi[2\pi]$$
  $$\arg(j) = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \qquad \arg(j^2) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

- $$\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}^*,\ \ \arg(z) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$$
  $$\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}^*,\ \ \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^*$$

- $$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^*,\ z = \sigma(\cos\theta + i\sin\theta),\ z' = \sigma'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
  $$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma' \\ \theta = \theta'\ [2\pi] \end{cases}$$
  $$z = -z' \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma' \\ \theta = \theta' + \pi\ [2\pi] \end{cases}$$
  $$z = \overline{z'} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma' \\ \theta = -\theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

2) Exponentielle complexe

- $\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \text{on note }\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}}$

- $$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \left|e^{i\theta}\right|=1$$
  $$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \arg(e^{i\theta})=\theta$$
  $$\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2,\ e^{i\theta}=e^{i\theta'}\Leftrightarrow\theta=\theta'\ [2\pi]$$

- $$e^{2i\pi}=1 \qquad e^{2k\pi i}=1$$
  $$e^{i\pi}=-1$$
  $$e^{i\frac{\pi}{2}}=i \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$$
  $$e^{2i\frac{\pi}{3}}=j \qquad e^{-2i\frac{\pi}{3}}=j^2$$

- $$\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2,\ e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$$
  $$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \overline{e^{i\theta}}=\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$$
  $$\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2,\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$$
  $$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l}\forall (z,z')\in \left(\mathbb{C}^*\right)^2,\ \arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]\\ \forall z\in \mathbb{C}^*,\ \arg(\frac{1}{z})=-\arg(z)\ [2\pi]\\ \forall (z,z')\in \left(\mathbb{C}^*\right)^2,\ \arg(\frac{z}{z'})=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]\\ \forall z\in \mathbb{C}^*,\ \forall n\in \mathbb{Z},\ \arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]\end{array}}$$

- Soit A,B et M, trois points du plan distincts

  $$\boxed{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=\arg(\frac{z-b}{z-a})\ [2\pi]}$$

- Soit A,B,C et D quatre points du plan d'affixes a,b,c et d avec A différent de B et C différent de D

  $$\boxed{\begin{array}{l}A,B,C \text{ alignés} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0\,[\pi]\Leftrightarrow \arg(\frac{c-a}{b-a})=0\ [\pi]\\ (AB)//(CD)\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0\,[\pi]\Leftrightarrow \arg(\frac{d-c}{b-a})=0\ [\pi]\\ (AB)\perp(CD)\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\frac{\pi}{2}\,[\pi]\Leftrightarrow \arg(\frac{d-c}{b-a})=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l}(AB)//(CD)\Leftrightarrow \dfrac{d-c}{b-a}\in \mathbb{R}^*\\ (AB)\perp(CD)\Leftrightarrow \dfrac{d-c}{b-a}\in i\mathbb{R}^*\\ \vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow z\overline{z'}\in \mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{z}z'\in i\mathbb{R}\end{array}}$$

- Soit z = x + iy alors $e^z = e^x \times e^{iy}$

3) Complexes et trigonométrie

- Formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

- Formule de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

4) Racines n^ième de l'unité

- Pour tout n différent de 0 de N, il y a exactement n racines n^iène de l'unité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \text{ avec } 0 \le k \le n-1$$

- $$\forall k \in \mathbb{Z},\ z_k = (z_1)^k = \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)\right)^k$$

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \overline{z_k} = z_{n-k}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{z_k} = \overline{z_k} = z_{n+1}$$

- $$\sum z_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod z_k = (-1)^{n-1}$$

- Pour tout n différent de 0 de N, il y a exactement n racines n[ième] d'un complexe non nul.
  a est un complexe non nul, *α* est l'angle et *r* le module.

$$\boxed{z^n = a \Leftrightarrow z = r^{\frac{1}{n}} \times e^{i\frac{\alpha}{n}} \times z_k,\ \text{avec } 0 \le k \le n-1}$$

III) Complexe et géométrie plane

1) Transformations

- $z = \overline{z} \Leftrightarrow$ z est le symétrique de $\overline{z}$ par rapport à (0x)
  $z = -z \Leftrightarrow$ z est le symétrique de -z par rapport à 0
  $z = -\overline{z} \Leftrightarrow$ z est le symétrique de $-\overline{z}$ par rapport à (Oy)

- Translation de vecteur $\vec{u}$(b) $\Leftrightarrow z' = z + b$
  Homotéthie de rapport k et de centre Ω $\Leftrightarrow z' - w = k(z - w)$
  Rotation d'angle α et de centre Ω $\Leftrightarrow z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$
  Simulitude directe $\Leftrightarrow z' = az + b$ avec $a \neq 1$

- Si h est une homothétie et r une rotation de même sens que g alors h o r = r o h
- La composée est la similitude de centre Ω et de rapport λ (rapport de h) et d'angle θ (angle de r).

2) Barycentres (rappel de Terminale)

- Soit un système de n point pondérés avec la somme des coefficients différent de 0, alors il existe un seule point G de l'espace tel que :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i GA_i = \vec{0}}$$

- Homogénéité du barycentre : Si on multiplie chaque coefficient par un réel k non nul alors le barycentre ne change pas.

- Relation fondamentale :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}$$

- Dans un repère orthonormé, on peut calculer les coordonnées de G. On applique la relation fondamentale pour M = 0 :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}}{\alpha_{1} + \ldots + \alpha_n}}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \\ z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \end{cases}$$

- Dans le plan complexe avec z_1, z_2… z_n des affixes respectives de A_1, A_2 … A_n alors Z, affixe du barycentre G est :

$$\boxed{Z = \frac{\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}$$

- Barycentre partiel : Le barycentre d'un système ne change pas si on remplace des points pondérés par leur barycentre partiel à condition d'affecter ce barycentre partiel de la somme des coefficients disparus.

- Conservation du barycentre : Soit f une symétrie, une rotation ou une translation du plan, l'image f(G) du barycentre d'un système [A1, α_1], … , [A_n, α_n] est le barycentre du système image [f(A_1), α_1], … , [f(A_n), α_n].

3) Droites et cercles

- Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b. Pour k appartenant à R, l'ensemble des points d'affixe z tels que : $\frac{|z-a|}{|z-b|} = k$ est une ligne de niveau.

  Si k < 0 alors pas de solution.
  Si k = 0 alors une solution : le singleton $\{A\}$
  Si k = 1 alors c'est la médiatrice de [AB]
  Si k > 0, k différent de 1, alors c'est un cercle dont le centre est situé sur [AB]

- Soient A, B, C et D deux à deux distincts. A, B, C et D sont cocycliques ou alignés ssi :
  $$\frac{(d-a)/(c-a)}{(d-b)/(c-d)} \in \mathbb{R}$$
  On note $\left(\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b}\right) \in \mathbb{R}$

- Soit A(a) et B(b) avec a différent de b. Pour $\lambda \in \mathbb{R} - \{\pi\mathbb{Z}\}$, l'ensemble des points d'affixe z tels que :
  $\arg(\frac{z-a}{z-b}) = \lambda \ [\pi]$ est un cercle passant par A et B privé de A et B

IV) Fonctions et suites à valeurs complexes

1) Fonctions à valeurs complexes

- Soit *f* une fonction. *f* est bornée si
  $$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall t \in I, \ |f(t)| \leq M}$$

- Soit *f* une fonction et λ un complexe. Soit *a* appartement a I au borne de I
  $$\boxed{\lim_{t \to a} f(t) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{t \to a} |f(t) - \lambda| = 0}$$

- Soit *f* une fonction et λ un complexe. Soit *a* appartement a I au borne de I

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t\to a} \mathrm{Re}[f(t)] = \mathrm{Re}(\lambda) \\ \lim_{t\to a} \mathrm{Im}[f(t)] = \mathrm{Im}(\lambda) \end{cases}$$

- Dérivation : *f* est dérivable en a si et seulement si Re(f) et Im(f) est dérivable en Re(a) et Im(a) et on a :

$$f'(a) = [\mathrm{Re}(f)]'(a) \ + \ i[(\mathrm{Im}(f)]'(a)$$

- Intégration :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}[f(t)]dt + i\int_a^b \mathrm{Im}[f(t)]dt$$

2) Suites à valeurs complexes.

- Suite arithmétique de raison r :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = z_n + r$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0 + nr$$

- Suite géométrique de raison q :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = z_n \times q$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0 \times q^n$$

- Suite arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = a \times z_n + b$$

- Pour une suite géométrique de raison q appartement aux complexes :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } q < 1 \text{ alors } \lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0 \\ \text{Si } q \geq 1 \text{ alors } z_n \text{ n'a pas de limite} \end{cases}}$$

- Même définition de limite que pour les fonctions à valeurs complexes.