Géométrie dans l'espace

Dans tout ce cours, on notera :
- E l'ensemble des points de l'espace.
- $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.
- RON, le repère orthonormal.
- ROND, le repère orthonormal direct.

I) Repères

1) Repères cartésiens

- Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ trois vecteurs indépendants,

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \vec{p} \in \vec{E},\ \exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{p} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \\ \forall M \in E, \exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \end{array}}$$

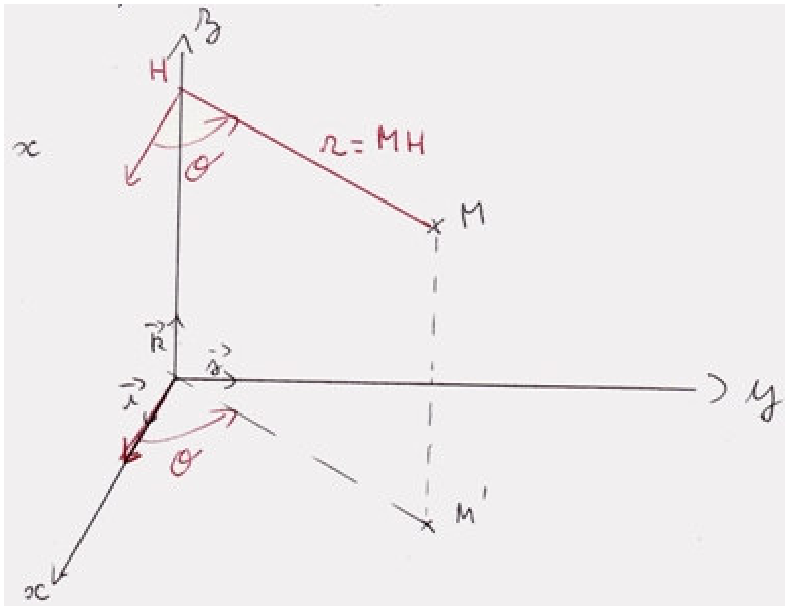
  La réciproque est vraie.

- Repères orthogonaux, orthonormés et changement de repères : Mêmes définitions que dans le plan en rajoutant une coordonnée.

2) Coordonnées cylindriques

- Soit (x, y, z) les coordonnées cartésiennes de M dans un repère. Un système de coordonnées cylindriques de M est un triplet (r, θ, z) :

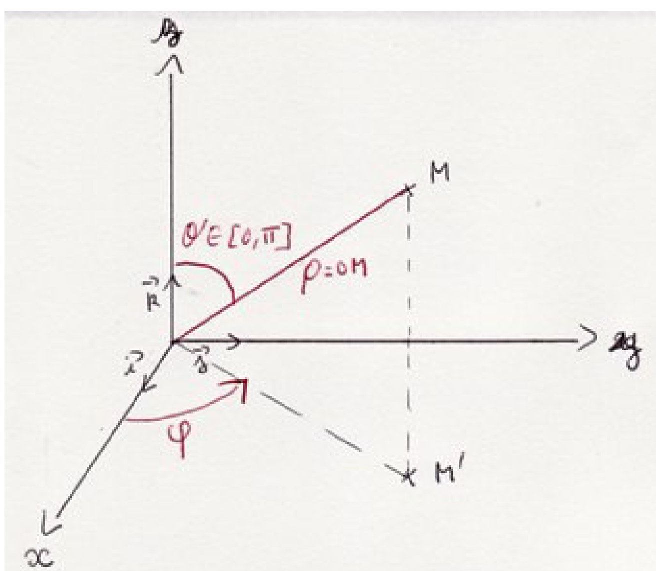
$$\boxed{\begin{cases} r = HM \\ \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{HM}) \ [2\pi] \end{cases}}$$



3) Coordonnées sphériques

- Les coordonnées sphériques de M est un triplet (ρ, φ,θ) :

$$\boxed{\begin{cases} \sigma = OM \\ \varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OH'})\ [2\pi] \\ \theta = (\widehat{\vec{k}, \overrightarrow{OM}}) \end{cases}}$$



II) Produit scalaire

1) Définitions

- Dans l'espace, deux vecteurs indépendants définisse ment un plan vectoriel mais pas d'orientation de ce plan. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de l'espace : Si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ alors le produit scalaire est nul sinon on a :
$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

- En coordonnées le produit scalaire est définie par :
$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

2) Propriétés

- On retrouve les nombreuses propriétés du produit scalaire dans le plan
- La propriété du projeté orthogonal d'un point sur une droite est la même dans l'espace que dans le plan.

III) Produit vectoriel

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$ sinon on a les caractéristiques suivantes :
  - <u>direction</u> : orthogonale au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  - <u>sens</u> : il faut que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit une base directe de $\vec{E}$
  - <u>norme</u> : $\boxed{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})}$

- $$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u},\vec{v} \text{ col } \Leftrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \\ \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\| = \left|\det(\vec{u},\vec{v})\right|\end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l}\forall(\vec{u},\vec{v})\in \vec{E}^2,\ (\vec{u}\wedge\vec{v}) = -(\vec{v}\wedge\vec{u}) \\ \forall(\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}')\in \vec{E}^4,\ \vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}') = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})+\mu(\vec{u}\wedge\vec{v}') \\ \forall(\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}')\in \vec{E}^4,\ \vec{v}\wedge(\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}') = \lambda(\vec{v}\wedge\vec{u})+\mu(\vec{v}\wedge\vec{u}')\end{array}}$$

- <u>Expression du produit vectoriel dans un ROND</u> :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz'-y'z \\ x'z-xz' \\ xy'-x'y \end{pmatrix}}$$

IV) Produit mixte

- <u>Définition</u> :

$$\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in \vec{E}^3,\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} \in \mathbb{R}}$$

- $$\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in \vec{E}^3,\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \ \vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}},\vec{\mathrm{w}} \text{ sont coplanaires}}$$

$$\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in \vec{E}^3,\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

- $$\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in \vec{E}^3,\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$

- Le produit mixte est <u>anti symétrique</u> et <u>trilinéaire</u>.

V) Droites et plans

1) Représentations

- Un plan de l'espace est définie de manière unique par les données de <u>3 points non alignés</u>, d'un <u>point et de deux vecteurs indépendants</u> ou <u>d'un point et d'un vecteur normal</u>.

- <u>Représentation paramétrique</u> :

  Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs indépendants. (P) est le plan passant par 1 et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

  Pour tout M de (P) on a $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ indépendants et ils forment une famille <u>non libre</u> ou <u>liée</u>.

  Dans un ROND, A(a, b, c) et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ et on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} x=a+\alpha t+\alpha' t' \\ y=b+\beta t+\beta' t' \quad (t,t')\in\mathbb{R}^2 \\ z=c+\gamma t+\gamma' t' \end{cases}}$$

- Equation cartésienne : Avec les mêmes notations, on obtient :

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-a & \alpha & \alpha' \\ y-b & \beta & \beta' \\ z-c & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda x + \mu y + \nu z + \varepsilon = 0}$$

- Equation cartésienne obtenue avec un vecteur normal :

  Soit A(a, b, c) et $\overrightarrow{n}(n_1, n_2, n_3)$, on obtient une équation :

$$\boxed{n_1 x + n_2 y + n_3 z = d}$$

  Réciproquement, si (P) est représenté par une équation du type $\lambda x + \mu y + \nu z + \varepsilon = 0$ alors le vecteur de coordonnées (λ, μ, ν) est normal à (P).

- Représentation paramétrique d'une droite de l'espace :

  Soit A(a, b, c) et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, on a alors :

$$\boxed{\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = c + \gamma t \end{cases}}$$

- Représentation cartésienne :

  Une équation cartésienne dans l'espace donne un **plan**. Une droite de l'espace ne peut pas être caractérisée par une équation cartésienne.

  Soit (P) et (P') des plans ni parallèles et ni confondus alors leur intersection est une droite. Réciproquement, une droite peut être vue comme l'intersection de deux plans non parallèles la contenant.

Il faut retenir que si (P) et (P') sont deux plans non parallèles, la droite d'intersection de ces deux plans est dirigée par $n \wedge n'$.

2) Perpendiculaire commune à deux droites non parallèles

- Soit (D) et (D') deux droites non parallèles de l'espace. Il existe une unique droite Δ telle que Δ ⊥(D), $\Delta \cap (D) \neq \varnothing$ et Δ⊥(D'), $\Delta \cap (D') \neq \varnothing$.

  Δ est appelé perpendiculaire commune à (D) et (D').

3) Problèmes de distances

- Soit (P) un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Soit M un point de l'espace et H son projeté orthogonal su (P).

$$\boxed{\overrightarrow{MH} = \left(\frac{\overrightarrow{MA}.\vec{n}}{\left\|\vec{n}\right\|^2}\right)\vec{n}}$$

- Distance d'un point à un plan :

$$\boxed{d(M,P) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

VI) Sphères de l'espace

1) Définitions et représentations

- La sphère de centre Ω et de rayon R > 0 est l'ensemble des points tel que : $\boxed{\Omega M = R}$
- Si a et b sont deux points distincts, l'ensemble des points tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est une sphère de diamètre [AB]

- Equation cartésienne : Soit Ω(a, b, c), on a alors :

$$\boxed{\forall M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2=R^2}$$

- Coordonnées cylindriques pour une sphère de centre O :

$$\boxed{M(r,\theta,z)\in S \Leftrightarrow r^2+z^2=R^2}$$

- Coordonnées sphériques :

$$\boxed{M(\rho,\varphi,\theta)\in S \Leftrightarrow \rho=R}$$

2) Problèmes d'intersection

- Intersection d'uns sphère avec une droite D :
  - Si d(Ω, D) > R, alors l'intersection est vide.
  - Si d(Ω, D) = R, alors l'intersection est le singleton {H}, projeté orthogonal de Ω sur D.
  - Si d(Ω, D) < R, alors l'intersection contient deux points.*

- Intersection d'une sphère avec un plan P :
  - Si d(Ω, P) > R, alors l'intersection est vide.
  - Si d(Ω, P) = R, alors l'intersection est le singleton {H}, projeté orthogonal de Ω sur P.
  - Si d(Ω, P) < R, alors l'intersection est un cercle dont le centre est le projeté orthogonal de Ω sur P.

- Intersection de deux sphères :
  - Si ΩΩ' > R + R' ou ΩΩ' < |R – R'|, alors l'intersection est vide.
  - Si ΩΩ' = R + R' alors S et S' sont tangents extérieurement.
  - Si ΩΩ' = |R – R'| alors S et S' sont tangents intérieurement.
  - Si |R – R'| < ΩΩ' < R + R', alors l'intersection est un cercle.