Ensembles et applications

I) Les bases de logique

1) Les assertions

- Définition : Une assertion est un énoncé qui peut être vrai ou faux. Si A est une assertion alors (non A) est son contraire.

A	F	V
Non A	V	F

- Si A et B sont deux assertions alors « A et B » est vraie lorsque A et B sont toutes les deux vraies, « A ou B » est vraie si au moins l'une des deux est vraie (même si les deux sont vraies).

Tableau de vérité de « A et B »

$_B\backslash^A$	V	F
V	V	F
F	F	F

Tableau de vérité de « A ou B »

$_B\backslash^A$	V	F
V	V	V
F	V	F

2) Les implications et les équivalences

- Soient A et B deux assertions. « A ➔ B » est vraie si A est fausse (et B est quelconque) ou si A et B sont vraies. Donc pour démontrer une implication, on suppose que A est vraie et donc on montre que B est vraie.

Tableau de vérité de « A ➔ B »

$_B\backslash^A$	V	F
V	V	V
F	F	V

- « A ➔ B » est synonyme de « (non A) ou B »
- Soient A et B deux assertions. « A $\Leftrightarrow$ B » est vraies lorsque A et B ont la même valeur de vérité (A et B vraies ou A et B fausses).
- « A $\Leftrightarrow$ B » est synonyme de « A ➔ B » et « B ➔ A »

Tableau de vérité de « A $\Leftrightarrow$ B »

$_B\backslash^A$	V	F
V	V	F
F	F	V

- Si « A ➔ B » est vraie alors B est une <u>condition nécessaire</u> pour que A soit vraie. A est une <u>condition suffisante</u> de B.
- Si « A $\Leftrightarrow$ B » est vraie alors B est une condition nécessaire et suffisante de A et réciproquement.

3) Les synonymes

- « A ➔ B » est synonyme de (non A) ou B

- <u>Contraposée</u> : « A ➔ B » est synonyme de « non B ➔ non A »

<u>Exemple</u> : Démontrer que si n^2 est paire alors n est pair pour tout entier naturel.

On fait un raisonnement par contraposée. Soit n impair alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. Donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ est donc n^2 est impair. On a finalement, n impair ➔ n^2 impair donc on en déduit que n^2 pair ➔ n pair. D'autre part la réciproque est vraie.

- <u>Absurde</u> : Pour démontrer une proposition par l'absurde, on suppose que A est fausse et avec les autres données de l'énoncé, on aboutit à une contradiction.

Exemple : Soit A : « P ➔ Q » avec un raisonnement par l'absurde. On a A : « (non P) ou Q » et donc (non A) : « P ou (non Q) ». Donc pour montrer A par l'absurde, on suppose que Q est fausse et P vraie et on cherche une contradiction.

- En conclusion : « P ➔ Q »
  ** par contraposée : (non Q) ➔ (non P)
  ** par l'absurde : [(non Q) et P] ➔ contradiction

Exemple classique (à connaître) : Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ par l'absurde. On choisit $\frac{p}{q}$ comme fraction irréductible.

On suppose que Q $\in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels *p* et *q* tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec q différent de 0.

On a donc $p^2 = 2q^2$ (en élevant au carré). Donc on en déduit que p^2 est pair. Or on a vu que cela entraînait *p* pair. *p* peut donc s'écrire sous la forme 2k avec *k* un entier naturel.

On a alors $p = 2k \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$
Avec cette égalité on obtient que q^2 est pair et donc *q* est pair.

Conclusion : On a *p* et *q* pairs et divisibles par 2. Or on a dit que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible donc que *p* et *q* n'ont pas de diviseurs communs. On aboutit donc à une contradiction. Au final, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- Lois de Morgan :
  ** [non (A et B)] ⇔ [(non A) ou (non B)]
  ** [non(A ou B)] ⇔ [(non A) et (non B)]

« non(P ➔ Q) » est synonyme de « P et (non Q) »

Exemple : Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère f une fonction sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \varepsilon > 0$.

Soit A : « $(|x - a| \leqslant \alpha)$ ➔ $(|f(x) - f(a)|) \leqslant \varepsilon$ » alors

(non A) : « $(|x - a| \leqslant \alpha)$ et $(|f(x) - f(a)|) > \varepsilon$ »

II) Les ensembles

1) Les généralités

- Si E est un ensemble et si x est un élément de l'ensemble de E alors $x \in E$ ou $x \notin E$. On a aussi $\varnothing$: ensemble vide et $\{x\}$: le singleton x (un ensemble ne contenant qu'un seul élément).

2) Les quantificateurs

- On distingue, « $\forall$: pour tout » et « $\exists$: il existe »

- non($\forall x \in E$, P(x) vraie) : $\exists x \in E$ / P(x) fausse
non($\exists x \in E$, P(x) vraie) : $\forall x \in E$, P(x) fausse

3) Sous ensembles

- Soit E un ensemble et F un sous ensemble.
$\boxed{\text{On a } F \subset E : \forall x \in F, x \in E}$

- Si $E = \{x \,/\, A(x) \text{ vraie}\}$ et $F = \{x \,/\, B(x) \text{ vraie}\}$ alors
$\boxed{F \subset E \Leftrightarrow \forall x\, B(x) \Rightarrow A(x)}$

En conclusion, une implication correspond à une inclusion entre ensembles.

Exemple : Soir F un sous ensemble de points du plan. Soit M(x, y).
$M \in F \Rightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$. On a alors, F inclus dans l'ellipse de centre 0. Ici (avec l'implication seulement) rien ne prouve que F est l'ellipse entière.

- Egalité entre ensembles : $\boxed{F = E \Leftrightarrow F \subset E \text{ et } E \subset F}$

- Pour tout ensemble E, on a toujours $\varnothing \subset E$ et $E \subset \varnothing$ donc $\varnothing = E$

- Pour tout ensemble E, $E \subset E$. On dit que l'inclusion est réflexive.

- Pour tous ensembles E et F, si $F \subset E$ et $E \subset F$ alors $F = E$. On dit que l'inclusion est <u>antisymétrique</u>.
- Pour tous ensemble E, F et G, si ($G \subset F$ et $F \subset E$) alors $G \subset E$. On dit que l'inclusion est <u>transitive</u>.

En conclusion, on dit que l'inclusion est une relation d'ordre entre les ensembles.

- **<u>Ensemble des parties de E</u>** : Si E est un ensemble, on note P(E) l'ensemble des parties de E (c'est-à-dire l'ensemble des sous ensembles de E). Donc si $F \subset E$, on note $F \in P(E)$.
- On a toujours $\varnothing \in P(E)$ et $E \in P(E)$. De plus, pour tout $F \in P(E)$, $\varnothing \subset F$. On dit que $\varnothing$ est le plus <u>petit élément</u> de P(E). De même, pour tout $F \in P(E)$, $E \subset F$. On dit que E est le plus <u>grand élément</u> de P(E).

<u>Exemple</u> : Soit $E = \{a, b, c\}$

On a alors : $P(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$

4) Réunions, intersections et complémentaires

- Soit un ensemble E et A,B des parties de E, on a alors :
  $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
  $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$

- Soit E et F deux ensembles.
  ** On a toujours $E \subset (E \cup F)$ et $F \subset (E \cup F)$.
  Si A est un ensemble tel que $E \subset A$ et $F \subset A$ alors $(E \cup F) \subset A$.
  On dit que $E \cup F$ est le plus <u>petit ensemble</u> contenant à la fois E et F.

  ** On a toujours $(E \cap F) \subset E$ et $(E \cap F) \subset F$.
  Si A est un ensemble tel que $A \subset E$ et $A \subset F$ alors $A \subset (E \cap F)$.
  On dit que $E \cap F$ est le plus <u>grand ensemble</u> contenu à la fois E et F.

- **<u>Ensemble disjoint</u>** :
  Si A et B sont des ensembles tels que $A \cap B = \varnothing$, on dit que A

et B sont disjoints. On note $\boxed{A \coprod B}$

- $$\boxed{\begin{array}{l} E \cup F = F \cup E \\ E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G = E \cup F \cup G \\ \varnothing \cup E = E \cup \varnothing = E \\ E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G) \\ E \cup F = \varnothing \Leftrightarrow E = \varnothing \text{ et } \mathrm{F} = \varnothing \end{array}}$$

En conclusion, le « union » est commutatif, associatif et ∅ est élément neutre mais le seul élément admettant un symétrique est ∅.

- $$\boxed{\begin{array}{l} E \cap F = F \cap E \\ E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G = E \cap F \cap G \\ \varnothing \cap E = E \cap \varnothing = \varnothing \\ E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G) \end{array}}$$

En conclusion, le « intersection » est commutatif, associatif et ∅ est élément absorbant.

- Si A et B sont des parties d'un ensemble alors :
$$\boxed{\begin{array}{l} A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A \\ A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \end{array}}$$

- Soit E un ensemble et F une partie de E. Le complémentaire de F dans E est noté : E \ F = {x ∈ E, x ∉ F}. On peut aussi le noter : E – F = $C_E(F)$

- L'ensemble E \ F = {x ∈ E, x ∉ F} est bien défini si E et F sont des ensembles quelconques. La notation avec le « C » est réservée au cas où F ⊂ F. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E, on note : $\boxed{\overline{F} = C_E(F)}$

- Soit E un ensemble et X, Y des parties de E :

$$\boxed{\begin{array}{l} X \subset Y \Leftrightarrow \overline{Y} \subset \overline{X} \\ \overline{X \cup Y} \Leftrightarrow \overline{X} \cap \overline{Y} \\ \overline{X \cap Y} \Leftrightarrow \overline{X} \cup \overline{Y} \end{array}}$$

- <u>**Différence symétrique**</u> (« ou » exclusif) :
  Soit E et F deux ensembles. $E \,\Delta\, F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.
  On a : $E \,\Delta\, F = (E \setminus F) \amalg (F \setminus E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$

5) Produit cartésien

- Soit $(x \in E)$ et $(y \in F)$, (x, y) est un couple.
  E x F (lire « E croix F ») est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$, E x F est le produit cartésien de E par F.
- $E \times E = E^2$
- Pour $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensemble,
  $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(n_1, \ldots, x_n) \text{ où } x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}$
- $$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k = E^n$$

<u>Exemple</u> : Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas un produit cartésien.

Supposons qu'il existe $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$ tel que $E \times F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Or $(0, 1) \neq (0, 0)$ donc $(0, 1) \in E \times F$ donc $(0 \in E)$ et $(1 \in F)$. Même raisonnement $(1, 0) \neq (0, 0)$ donc $(1, 0) \in (E \times F)$ donc $(0 \in F)$ et $(1 \in E)$. On en déduit que $(0, 0) \in (E \times F)$ puisque $(0 \in E)$ et $(0 \in F)$ ➔ contradiction donc (E x F) n'est pas le produit cartésien de $\mathbb{R}^2$

III) Les applications

1) Définitions

- Soit E et F deux ensembles. Une application de E vers F est un sous ensemble de E x F tel que :

$$\boxed{(\forall x \in E), (\exists ! y \in F), (x, y) \in G}$$

Ici, on définie une application par la donnée de son graphe.

- Si F est un graphe d'application alors pour tout x appartenant à E, l'unique élément y appartenant à F et associé à E est l'image de x par l'application en question.

- Soit f une application de E dans F. Soit $(\forall y \in F)$ alors y admet un antécédent par f. Si f est une application, les éléments de F n'ont pas forcément tous un antécédent ou si y admet un antécédent, il n'est pas forcément unique. Chercher les antécédents de y, c'est résoudre l'équation y = f(x) d'inconnue x.

- L'ensemble des application de E dans F est noté A(E,F) ou F^E

- L'application « identité de E » est notée :

$$\boxed{\begin{array}{rl} Id_E : E & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto x \end{array}}$$

2) La composition

- Soient E, F et G trois ensembles. Soit f appartenant à A(E,F) et y appartenant à A(F,G) alors (g o f) appartient à A(E,G) et on a :

$$\boxed{(\forall x \in E), (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

- La composition des applications est associative c'est-à-dire :

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

- **<u>Attention</u>** : $\boxed{(g \circ f) \neq (f \circ g) \text{ en général}}$

- <u>Propriété</u> : $\boxed{\forall f \in A(E,F), \begin{cases} f \circ Id_E = f \\ Id_F \circ f = f \end{cases}}$

3) Restriction et prolongement

- Soit f appartenant à A(E,F) et H $\subset$ E. La restriction de f à H (au départ) est l'application notée :

  $$\boxed{\begin{aligned} f_{|H} : H &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}}$$

  Cette application est bien définie car tout éléments de H $\in$ E donc ils admettent une unique image *y* dans F par l'application.

- Soit f appartenant à A(E,F) et U tel que E $\subset$ U. Un prolongement de f à U est une application g de A(U,F) telle que $y_{|E} = f$. *y* n'et pas définie de manière unique.

- Restriction à l'arrivée (si possible) : Soit f appartenant à A(E,F) et K $\subset$ F. L'application $\begin{aligned} \tilde{f} : E &\to K \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$ est bien définie si et seulement si $\forall x \in E, f(x) \in K$. Dans ce cas, cette application est la restriction de f à l'arrivée.

4) Injection, surjection et bijection

- **<u>Définition injection</u>** : f est injective si tout éléments de F (ensemble d'arrivée) admet au plus un antécédent (0 ou 1 seul).

  $$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

- **<u>Définition surjection</u>** : f est surjective si tout élément de F (ensemble d'arrivée) admet au moins un antécédent (1 ou plusieurs).

  $$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)}$$

- **<u>Définition bijection</u>** : f est bijective si tout élément de F (ensemble d'arrivée) admet un unique antécédent par f.

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! x \in E \,/\, y = f(x)}$$

- F est non injective si :

$$\boxed{\exists (x_1, x_2) \in E^2 \,/\, x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)}$$

- F est non surjective si :

$$\boxed{\exists y \in F \,/\, \forall x \in E,\, y = f(x) \text{ n'a pas de solution}}$$

- F est non bijective si et seulement si f est non injective ou f non surjective.

- Soit f appartenant à A(E,F) et g appartenant à A(F,G).
  ** Si f et g sont injectives alors (g o f) est injective.
  ** Si f et g sont surjectives alors (g o f) est surjective.
  ** Si f et g sont bijectives alors (g o f) est bijective.

- Soit f appartenant à A(E,F) et g appartenant à A(F,G).
  ** Si (g o f) est injective alors f est injective. (rien sur g)
  ** Si (g o f) est surjective alors g est surjective. (rien sur f)

- Théorème – définition : Soit f appartenant à A(E,F). f est bijective si et seulement si, il existe une application g appartenant à A(F,E) telle que (g o f) = Id_E et (f o g) = Id_F
  Dans ce cas, g est unique et c'est la réciproque de l'application f notée f^{-1}. Cette application est encore une bijection.

5) Image directe et image réciproque

- **Image directe** : Soit f une application de E vers F et A une partie de E. f(A) = {f(x), x ∈ A} est l'image directe de la partie A par f. En d'autres termes, un élément de F ∈ f(A) si et seulement si il admet un antécédent de A :

$$\boxed{\forall y \in F \,/\, y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A \,/\, y = f(x))}$$

- **Image réciproque** : Soit f une application de E vers F et B une partie de F. $f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}$ est l'image réciproque de la partie B par f. En d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in E / x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$$

- On a toujours f(∅) = ∅ et f^{-1}(∅) = ∅.

- f est <u>surjective</u> si et seulement si f(E) = F (l'image directe de l'ensemble de départ est égale à l'ensemble d'arrivé).

- Si f n'est pas surjective, f(E) ⊂ F alors l'application restreinte à l'arrivée f_1 ci bas est bien définie et surjective.

$$\begin{aligned} f_1 : E &\rightarrow f(E) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

IV) Familles d'objets indexées par un ensemble qcq

1) Définitions

- Soit I et E deux ensembles non vides. Une famille d'éléments de E indexées par I est une application de I dans E.

  <u>Exemple</u> : Si $\begin{aligned} u : I &\rightarrow E \\ \mathrm{i} &\mapsto u(i) \end{aligned}$ est une famille alors on note $\boxed{u = (u_i)_{i\in I}}$

- L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est noté E^I

2) Réunions et intersections généralisées

- Soit I et E deux ensembles non vides. Soit $A = (A_i)_{i\in I} \in P(E)^I$, c'est une famille des parties de E indexées par I.

- L'ensemble des éléments de E appartenant à <u>au moins</u> l'un des A_i est noté :

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E / \exists i \in I, x \in A_i\}}$$

- L'ensemble des éléments de E appartenant à <u>tous les</u> A_i est noté :

$$\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in I, x \in A_i\}}$$

- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vide alors :

$$\boxed{\prod_{i\in I} A_i = \{(x_i)_{i\in I} \,/\, \forall i \in I, x_i \in A_i\}}$$

3) Partitions d'un ensemble

- Soit E un ensemble non vide. Une partition de E est une famille de parties de E telle que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i \in I, A_i \neq 0 \\ \forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j \neq 0 \\ \bigcup_{i\in I} A_i = E \end{array}}$$

  La famille des A_i est une famille de parties non vides, deux à deux disjoints dont la réunion vaut E.

- $(A_i)_{i\in I} \in P(E)^I$ est une partition de E si eu seulement si :

$$\boxed{\forall x \in E, \exists! i \in I \,/\, x \in A_i}$$

  Chaque élément de E est situé dans une seule des parties A_i

V) Relations binaires

1) Définitions

- Soit E un ensemble non vide. $\mathbb{R}$ est une relation binaire sur E liant les éléments de E deux à deux. Si (a, b) ∈ E^2 et si *a* est lié à *b* par la relation $\mathbb{R}$ alors on note : « a $\mathbb{R}$ b ».

- Une relation binaire sur E est une relation d'équivalence sur E si elle est <u>réflexive</u>, <u>symétrique</u> et <u>transitive</u>.

- Une relation binaire sur E est une relation d'ordre sur E si elle est <u>réflexive</u>, <u>antisymétrique</u> et <u>transitive</u>.

- Une relation d'ordre $\prec$ sur un ensemble E est <u>totale</u> si deux éléments quelconque de E sont en relation.

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, x \prec y \text{ ou } y \prec x}$$

- Si un ensemble E est muni d'une relation d'ordre quelconque, on dit que (E, $\prec$) est un ensemble <u>ordonné</u>.

- Si (E, $\prec$) est un ensemble ordonné et si A est une partie non vide de E :
  - ** un <u>majorant</u> de A est un élément de m ∈ E tel que : $\forall x \in A, x \leqslant m$
  - ** un <u>minorant</u> de A est un élément de m ∈ E tel que : $\forall x \in A, x \geqslant m$
  - ** un <u>plus grand élément</u> de A est un majorant de A qui appartient à A. Il est **<u>unique</u>** et noté « max(A) ».
  - ** un <u>plus petit élément</u> de A est un minorant de A qui appartient à A. Il est **<u>unique</u>** et noté « min(A) ».

2) Propriétés

- <u>Réflexive</u> :

$$\boxed{\forall x \in E, x \mathbb{R} x}$$

- <u>Symétrique</u> :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, x \mathbb{R} y \Leftrightarrow y \mathbb{R} x}$$

- Antisymétrique :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, (x \ \mathbb{R} \text{ y et } y \ \mathbb{R} \ x) \Rightarrow x = y}$$

- Transitive :

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3, (x \ \mathbb{R} \text{ y et } y \ \mathbb{R} \text{ z}) \Rightarrow x \ \mathbb{R} \text{ z}}$$

- Remarque : L'égalité est la seule relation symétrique et antisymétrique.