Les coniques à centre

I) Définition générale

- On note π le plan usuel orienté. Soit F un point de π et D une droite du plan telle que $F \notin D$. Soit $e \in \mathbb{R}^{*+}$. On appelle conique : $\boxed{\Gamma = \{M \in \pi \,/\, MF = e \times d(M,D)\}}$. Γ est la conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité *e*.
- L'image d'une conique par une similitude est une conique de même excentricité et de même nature.
- Soit K le projeté orthogonal de F sur D. La droite (KF) est un axe de symétrie de la conique. De plus, (KF) est l'axe focal de Γ.
- On appelle sommet de Γ un point d'intersection de Γ avec l'axe focal.

II) La parabole (cas où e = 1)

1) Définition et propriétés

- Définition : La parabole est une conique d'excentricité égale à 1.
- Soit F un point de π, D une droite avec $F \notin D$. Soit P la parabole de foyer F et de directrice D, on a donc :
  $$\boxed{\Gamma = \{M \in \pi \,/\, MF = d(M,D)\}}$$
- Soit K le projeté orthogonal de F sur D. On note p = KF = d(F, D). *p* est le paramètre de la parabole P.
- La parabole admet un unique sommet sur l'axe focal : S

2) Equation réduite

- On pose $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SF}}{\|\overrightarrow{SF}\|}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire tel que $(\vec{i}, \vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}$

Dans le r.o.n.d $(S, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole P a pour équation réduite :

$$\boxed{y^2 = 2 \times p \times x}$$

- Dans le repère $(S, -\vec{i}, -\vec{j})$, l'équation devient :
$\boxed{y^2 = -2 \times p \times x}$
- Dans un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation s'écrit :

$\boxed{Y^2 + 2aY + 2bX + c = 0}$ où a,b,c dépendent de *p* et des coordonnées de O dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) sont les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Représentation paramétrique et tangente.

- Dans le repère $(S, -\vec{i}, -\vec{j})$, l'équation de P est $y^2 = 2px$ donc on peut paramétrer P sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y(t) = t \end{cases}}$$

- Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de P. L'équation de la tangente en ce point est :

$\boxed{y \times y_0 = p(x + x_0)}$ (dédoublement des termes)

- Pour tout point M appartenant à P, la tangente en M à la parabole P est la médiatrice de [HF] où H est le projeté orthogonal de M sur D.

III) Les coniques à centre (cas où e ≠ 1)

1) Généralités

- Soit F un point du plan, D une droite telle que F ∉ D. Soit e un réel strictement positif et différent de 1. On a alors :

$$\boxed{\Gamma = \{M \in \pi \, / \, MF = e \times d(M, D)\}}$$

- Soit K le projeté orthogonal de F sur D. On appelle (FK), l'axe focal.

- Γ admet deux sommets sur l'axe focal : A et A'

- Soit O le milieu de [AA']. On appelle $\boxed{a = OA = OA' \text{ et } c = OF}$

- $$\overrightarrow{KA} = \frac{1}{1+e}\overrightarrow{KF} \qquad e = \frac{c}{a}$$
  $$\overrightarrow{KA'} = \frac{1}{1-e}\overrightarrow{KF} \qquad OK = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$$
  $$\overrightarrow{KO} = \frac{1}{1-e^2}\overrightarrow{KF}$$

- **<u>Equation réduite</u>** : Soit $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$ et $\vec{j}$ directement orthogonal à $\vec{i}$. Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), l'équation de Γ est :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$$

- M'(x**, -y**) appartient à Γ équivaut à M(x, y) appartient à Γ. On retrouve le fait que la droite (O, $\vec{i}$) est un axe de symétrie.

- M'(-x, -y) appartient à Γ équivaut à M(c, y) appartient à Γ. On retrouve le fait que O est le centre de symétrie de la conique.

- On a aussi la droite (O, $\vec{j}$) comme axe de symétrie de la conique (axe non focal).

2) Cas de l'ellipse (e < 1)

- Une ellipse est une conique à centre d'excentricité < 1. On a donc c < a et donc a² - c² > 0. On pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et on obtient une équation réduite :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- Une ellipse possède deux points d'intersection avec l'axe non focal : B(0, b) et B'(0, -b) dans le repère associé.

- <u>Vocabulaire</u> : 2a = AA' ➔ grand axe
  a = OA ➔ demi grand axe
  2b = BB' ➔ petit axe
  b = OB ➔ demi petit axe
  2c = FF' ➔ distance focale
  c = OF ➔ demi distance focale

- Le cercle de centre O et de rayon a est appelé <u>cercle principal</u>.

- Le cercle de centre 0 et de rayon b est appelé <u>cercle secondaire</u>. Il est tangent à l'ellipse en B et B'.

- Le cercle de centre B et de rayon a coupe l'axe focal en F et F'. On a alors a = BF = BF'

- Soit I l'un des deux points d'intersection du cercle principal avec la droite (F, j). Soit T la tangente au cercle principale en I alors T coupe l'axe focal en K.

- Dans un repère (O, i, j) qui donne l'équation réduite, soit f l'application qui à un point M(x, y) associe M'(x', y') tel que :

$$\boxed{\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{b}{a} y \end{cases}}$$

f est l'affinité orthogonale d'axe (Ox) de rapport $\lambda = \frac{b}{a}$

Par l'application f, l'ellipse est l'image de son cercle principal.

- On obtient alors un paramétrage de l'ellipse :

$$\boxed{\begin{cases} x = a \times \cos(t) \\ y = b \times \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

- Equation de tangente par « dédoublement des termes » en M_0 :

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

- Définition bifocale de l'ellipse : Soient F et F' deux points distincts du plan et *a* un réel tel que a < $\frac{1}{2}$ FF' alors l'ensemble $\{M / MF + MF' = 2a\}$ est l'ellipse de foyers F et F', d'excentricité $e = \frac{FF'}{2a}$, de directrices D et D' perpendiculaires à (FF') en K et K' tels que $FK = \frac{a^2}{c} - c$ et $\overrightarrow{FK}$ de même sens que $\overrightarrow{FF'}$

- Projection orthogonale d'un cercle sur un plan : Dans l'espace usuel, l'image d'un cercle par une projection orthogonale sur le plan est une ellipse (vrai ellipse si le plan de projection n'est pas parallèle au plan du cercle sinon on a un cercle).

3) Cas de l'hyperbole (e > 1)

- Une hyperbole est une conique à centre d'excentricité > 1. On a donc c > a et donc $c^2 - a^2 > 0$. On pose $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ et on obtient une équation réduite :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- Une hyperbole possède deux points d'intersection avec l'axe focal : A(0, a) et A'(0, -a) dans le repère associé. Pas de point d'intersection avec l'axe non focal.

- Représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = a \times ch(t) \\ y = b \times sh(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -a \times ch(t) \\ y = b \times sh(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

- Equation de tangente par « dédoublement des termes » en M_0 :

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

- Asymptotes de l'hyperbole :

$$\boxed{\Delta : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta' : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0}$$

- L'écart angulaire entre chaque asymptote vaut : $\alpha = Arc\tan(\frac{b}{a})$

- L'écart angulaire entre les deux asymptotes vaut : 2α
- Si b =a alors les asymptotes sont perpendiculaires car $2\alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$
- Equation d'une hyperbole ramenée aux asymptotes :

  Les asymptotes ont pour vecteurs directeurs, respectivement $\vec{u}$ (a, b) et $\vec{v}$ (a, -b). Dans le repère cartésien (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) l'équation cartésienne de la tangente à l'hyperbole devient :

  $$\boxed{XY = \frac{1}{4}}$$

- Définition bifocale : Soir deux points F et F' distinct du plan et a un réel tel que a < $\frac{1}{2}$ FF' alors l'ensemble des points M tel que $\{M / |MF - MF'| = 2a\}$ est l'hyperbole de foyer F et F', d'excentricité $e = \frac{FF'}{2a}$. Son centre est O milieu de [FF'] et ses directrices sont des droites perpendiculaires à (FF') situés à la distance a²/c de 0.

IV) Equation polaire d'une conique de foyer O

Dans cette partie, R = (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

R' = (O, $\vec{I}$, $\vec{J}$) un r.o.n.d fixé

T une conique de foyer 0

- Soit T une conique de foyer O. Si l'axe focal (O, $\vec{I}$) et la directrice D associée au foyer O a pour équation x = d dans R' avec d = d(O, D) > 0 alors l'équation de la conique T dans R' est :

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}}$$

- Si $\vec{i}$ est un vecteur unitaire tel que $(\vec{I}, \vec{i}) = \varphi\ [2\pi]$ et si l'axe focal est $(O, \vec{i})$ et D la directrice associée au foyer O a pour équation normale x cos(φ) + y sin(φ) = d > 0 dans R' alors la conique T a pour équation polaire :

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)}}$$

- Pour une parabole (e = 1), la paramètre *p* est le même que celui introduit précédemment c'est-à-dire c'est la distance du foyer à la directrice.

- Pour les coniques à centre, on peut exprimer *a*,*b* et *c* en fonction de *p* et *e* :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ellipse : } a = \dfrac{p}{1-e^2} \quad b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad c = a \times e \\[2ex] \text{Hyperbole : } a = \dfrac{p}{e^2-1} \quad b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}} \quad c = a \times e \end{array}}$$

V) Réduction de l'équation cartésienne d'une courbe du second degré.

- Dans un r.o.n.d quelconque (pas le repère réduit), l'équation cartésienne d'une » conique est de la forme :

$$\boxed{mx^2 + mxy + py^2 + qx + ry + s = 0}$$

- Réciproque : Les courbes d'équation $mx^2 + mxy + py^2 + qx + ry + s = 0$ sont des coniques ou des coniques dégénérées.