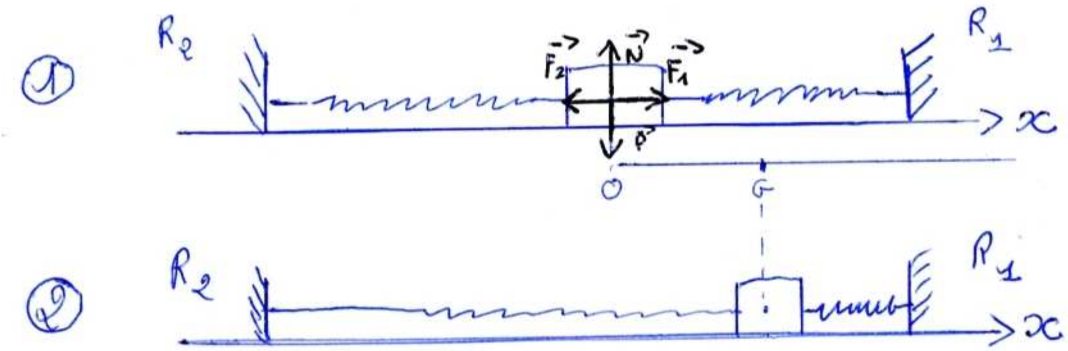
# Le pendule élastique non amorti

## I) Descriptif du dispositif




- Le ressort déjà tendu est dans son domaine d'élasticité :

$$\boxed{F = k \times x}$$

- L'amplitude est égale à $x_{max}$

- La période :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- Equations horaires du type sinusoïdales.

## II) Equation différentielle

Etablit à partir de la deuxième loi de Newton.

A l'équilibre on a : $\vec{P} + \vec{R} = 0$ et $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

Ecartons le solide de sa position d'équilibre de x = OG et $OG_{max} = x_{max} = A$

Le poids et la réaction du support se compensent toujours. Donc d'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a_G}$$

$$\overrightarrow{F_1}' + \overrightarrow{F_2}' = m \times \overrightarrow{a_G}$$

$$\text{Or} \quad \overrightarrow{F_1}' = \overrightarrow{F_1} - kx_i$$

$$\overrightarrow{F_2}' = \overrightarrow{F_2} - kx_i$$

$$\text{Donc} \quad \overrightarrow{F_1} - kx_i + \overrightarrow{F_2} - kx_i = m \times \overrightarrow{a_G}$$

$$\text{Or} \quad \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \vec{0}$$

$$\text{Donc} \quad -2kx_i = m \times \overrightarrow{a_G}$$

$$-2kx = m \times x'' \quad \text{(projection sur l'axe x)}$$

Equation différentielle : $\boxed{x'' + \frac{2k}{m} \times x = 0}$

L'association de deux ressorts de constantes k montés en série est équivalent à un ressort de constante de raideur 2k.

## III) Résolution de l'équation différentielle

Solution du type : $x = x_m \times \cos(\omega_0 \times t + \varphi)$

Avec $\omega_0$ la pulsation propre et $\varphi$ dépends des conditions initiales

Vérification de la solution avec φ = 0

$$x = x_m \times \cos(\omega_0 \times t + \varphi)$$
$$x' = -x_m \times \omega_0 \times \sin(\omega_0 \times t)$$
$$x'' = -x_m \times \omega_0^2 \times \cos(\omega_0 \times t)$$
$$x'' = -\omega_0^2 \times x$$

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 \times x = 0}$$

En identifiant :

$$\frac{2k}{m} = \omega_0^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega_0$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

## IV) Equation différentielle à partir de la conservation de l’énergie

Un ressort comprimé possède de l’énergie cinétique et de l’énergie potentielle de pesanteur ainsi que de l’énergie potentielle élastique.

$$\boxed{\text{Rappel : } \quad Ep_E = \frac{1}{2}kx^2 + cst}$$

Elle est définie à une unité arbitraire qui peut être zéro si x = 0.

$$\boxed{\text{Rappel : } \quad Em = Ec + Epp + Epe}$$

Appliquons la conservation de l’énergie sans frottements :

$$Em = (mgz + cst) + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = cst$$

$$Em = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = cst \text{ (car dispositif horizontal)}$$

$$k \times x \times x' + m \times x' \times x'' = 0 \text{ (on dérive par rapport au temps)}$$

$$\boxed{mx'' + kx = 0}$$

## V) Echanges énergétiques

C'est une parabole. L'oscillateur est dit harmonique. L'énergie est proportionnelle au carrée de l'amplitude.

## VI) Non conservation de l'énergie mécanique

Avec des frottements, l'énergie mécanique diminue. Elle est proportionnelle au carrée de l'amplitude. A chaque oscillation, l'amplitude diminue et la sinusoïde s'amortie. Entre deux instants, la variation est égale au travail de la force de frottement.

$$\boxed{Em_2 - Em_1 = \Delta Em = W_{(12)}\vec{F} < 0}$$