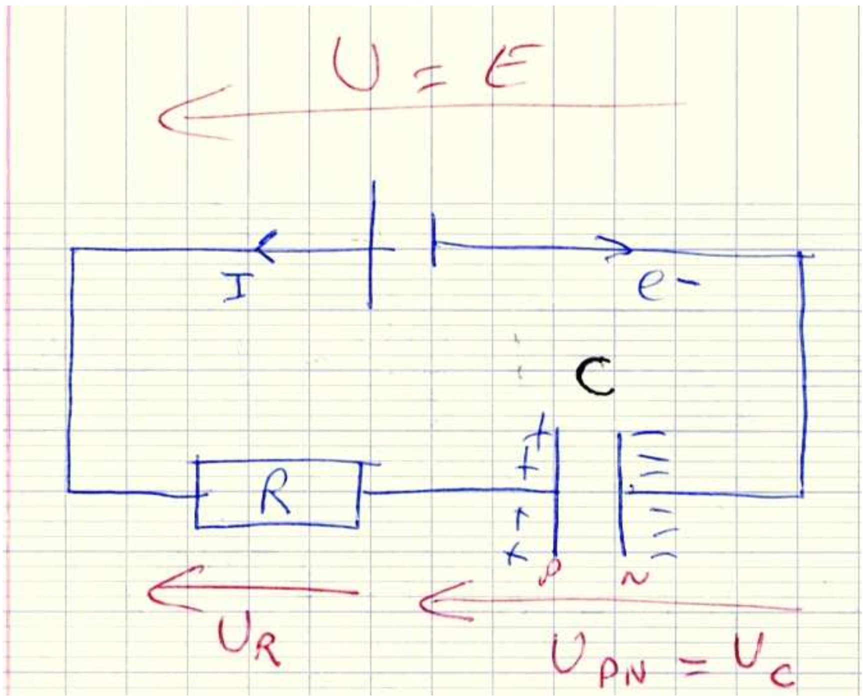
Compléments sur le condensateur

I) Equation différentielle et résolution à la charge

1) Trouver l'équation différentielle

Faire le schéma et bien l'orienter



U est la tension aux bornes du générateur ➔ constante !!
u correspond à une fonction du temps : u = u(t) ➔ pas constante !!

U_C est la tension aux bornes du condensateur
U_R est la tension aux bornes de la résistance

R est la résistance
C est le condensateur

Trouver l’équation différentielle

On sait que $U = U_R + U_C$

De plus on sait que,

$$\boxed{i = \frac{dq_P}{dt}} \qquad \boxed{q_P = C \times U_C}$$

En combinant les deux formules on obtient,

$$\boxed{i = C \times \frac{du_C}{dt}}$$

De plus, la loi des mailles permet de dire que :

$$U = U_R + U_C$$

Or on sait que la tension aux bornes d’une résistance est : $U_R = R.i$ Donc,

$$U = R.i + U_C$$

$$\boxed{U = R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C}$$

C’est l’équation différentielle du condensateur à la charge. Une équation différentielle fait apparaître une fonction et sa dérivée. Ici, la fonction est u ou u_C

2) Résolution de cette équation

La solution est exponentielle. On pose donc que,

$$\boxed{u_C = A + B\times e^{\frac{-t}{\tau}}}$$

Cette formule n'est pas à démontrer !

Rappelons que : $\boxed{e^{at\,'} = a.e^{at}}$

$$\Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} = -\frac{B}{\tau}\times e^{\frac{-t}{\tau}}$$

En remplacent dans l'équation différentielle de départ, on obtient finalement :

$$\boxed{U = A + B\times e^{\frac{-t}{\tau}} - R\times C\times\frac{B}{\tau}\times e^{\frac{-t}{\tau}}}$$

De plus, à la charge, U = E car le condensateur se charge et le phénomène se bloque lorsque U_{PN} = E

Donc cela devient,

$$\boxed{E = A + B\times e^{\frac{-t}{\tau}} - R\times C\times\frac{B}{\tau}\times e^{\frac{-t}{\tau}}}$$

En procédant par identification c'est-à-dire que $B\times e^{\frac{-t}{\tau}} - R\times C\times\frac{B}{\tau}\times e^{\frac{-t}{\tau}}$ doit être nulle et donc par conséquent A = E et même on peut dire que $B\times e^{\frac{-t}{\tau}} - R\times C\times\frac{B}{\tau}\times e^{\frac{-t}{\tau}}$ = 0 si et seulement si RC = τ (on remplace RC par τ et on voit bien que tout s'élimine et donne 0)

Pour finir, à t = 0, U_{PN} = U_C = 0 car le condensateur n'est pas encore chargé et de plus 0 = A + B donc A = -B

On en conclut que,

$$u_C = A + B \times e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$\Leftrightarrow u_C = A - A \times e^{\frac{-t}{\tau}} \quad \text{(car B = - A)}$$

$$\Leftrightarrow u_C = E + E \times e^{\frac{-t}{\tau}} \quad \text{(car A = E)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow u_C = E \times (1 - e^{\frac{-t}{RC}})}$$

II) Equation différentielle et résolution à la décharge

1) Trouver l'équation différentielle

A retenir : L'équation différentielle est la même à la charge qu'à la décharge.

$$\boxed{U = R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C}$$

2) Résolution de cette équation

La courbe de la décharge est aussi une exponentielle donc on peut poser la solution exponentielle.

$$\boxed{u_C = A + B \times e^{\frac{-t}{\tau}}}$$

Mais cette fois, $U_C = 0$ puisque le condensateur se décharge. Donc,

$$0 = A + B \times e^{\frac{-t}{\tau}} - R \times C \times \frac{B}{\tau} \times e^{\frac{-t}{\tau}}$$

De plus, à t = 0, $U_{PN} = U_C = E = B.e^{-t/\tau}$

Or, par identification, A = 0 et τ = RC et E = B (car $-t/\tau = 0$ et $e^0 = 1$)

On en conclut donc que,

$$u_C = A + B \times e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow u_C = E \times e^{\frac{-t}{\tau}}}$$ (car A = 0 et B = E)