

# Suites et fonctions

## I) Théorèmes pour les suites

- Soit  $u_n$  une suite et  $L$  sa limite. On dit que  $u_n$  converge vers  $L$  ssi pour tous intervalle ouvert  $I$  contenant  $L$  contient aussi tous les termes  $u_n$  à partir d'un certain rang.
- Toute suite convergente est bornée.
- Th des gendarmes : Soit 3 suites  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  vérifiant :
  - $u_n < v_n < w_n$  à partir d'un certain rang
  - $u_n$  et  $w_n$  convergents vers  $L$  et ont la même limite
- Alors  $v_n$  est convergente et à pour limite  $L$ .
- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minoré converge.
- Si une suite est croissante et majorée par  $M$  alors  $L < M$
- On dit que deux suites sont adjacentes ssi
  - $u_n$  est croissante et  $v_n$  décroissante
  - $u_n < v_n$  pour tout  $n$
  - limite de  $u_n - v_n = 0$  en plus l'infini
- Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers  $L$ .
- De plus, si  $u_n < v_n$  pour tout  $n$  alors  $u_n < L < v_n$
- Une suite est divergente ssi tout intervalle de la forme  $] a, +\infty[$  contient aussi tous les  $u_n$  à partir d'un certain rang.
- Soit  $u_n$  et  $v_n$  tels que  $u_n < v_n$  à partir d'un certain rang, alors
  - si limite  $u_n = +\infty$  alors limite de  $v_n = +\infty$
  - si limite  $v_n = -\infty$  alors limite de  $u_n = -\infty$
- Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers plus l'infini.

- Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers moins l'infini.

## II) Théorèmes pour les fonctions

- On dit que  $f$  tend vers l'infini ssi pour tout intervalle ouvert  $I$  de la forme  $]-\infty, a[$  contient aussi tous les  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand.
- Soit deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]a, +\infty[$  telles que pour tout  $x$  supérieur à  $a$ ,  $f(x) < g(x)$  alors
  - si limite  $f(x) = +\infty$  alors limite de  $g(x) = +\infty$
  - si limite  $f(x) = -\infty$  alors limite de  $g(x) = -\infty$
- Une fonction  $f$  a pour limite plus l'infini lorsque  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si tout intervalle du type  $]a, +\infty[$  contient aussi tous les  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$ .
- Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , la fonction  $f$  a pour limite  $L$  quand  $x$  tends vers plus l'infini si et seulement si tout intervalle ouvert  $I$  qui contient  $L$  contient aussi tous les réels  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand.
- Théorème des gendarmes pour les fonctions. (idem suites)
- Théorème de composition. (idem suites)

### III) Règles pour les limites

- Toute fonction polynôme non nulle admet en  $+\infty$  ou  $-\infty$  une limite qui est celle de leur terme de plus haut degrés.
- Toute fonction rationnelle non nulle admet en  $+\infty$  ou  $-\infty$  une limite qui est celle du quotient de leur terme de plus haut degrés.

#### Somme

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
f + g	l + l'	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

#### Produit

f	l	l $\neq$ 0	0	$\infty$
g	l'	$\infty$	$\infty$	$\infty$
f $\times$ g	l l'	$\infty$ règle des signes	forme indéterminée	$\infty$ règle des signes

#### Quotient

f	l	l	0	l	$\infty$	$\infty$
g	l' $\neq$ 0	0	0	$\infty$	1	$\infty$
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$\pm \infty$ à gauche/à droite	forme indéterminée	0	$\infty$ règle des signes	forme indéterminée

#### IV) Résultats connus pour les limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q = 0 \text{ pour } -1 < q < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q = +\infty \text{ pour } q > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q \text{ pour } q < -1 \text{ n'existe pas}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ n'existe pas}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$