Notions de probabilités

I) Un peu de vocabulaire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on peut prévoir quels sont les résultats possibles, encore appelés éventualités, mais dont on ignore lequel sera réalisé avant que l'expérience ne soit faire.
- **L'univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble formé de toutes les éventualités.
- Un **événement** est une partie de l'univers.
- On dit qu'un **événement A est réalisé** lorsque le résultat obtenu à l'issu de l'expérience est une éventualité de A.
- Un **événement élémentaire** est un événement formé d'une unique éventualité.

II) Quelques formules de probabilités

Loi de probabilité : $\sum_{i=1}^{n} pi = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Equiprobabilité : $p_i = \frac{1}{n}$ (exemple : le jeu de pile ou face)

Expérance d'un loi de proba : $\mu = \sum_{i=1}^{n} pi \times x_i$

Variance : $V = \sum_{i=1}^{n} pi \times (x_i - \mu)^2$

Ecart type : $\sigma = \sqrt{V}$

III) Réunions et intersections

- La réunion de événements 1 et B est l'événement A $\cup$ B formé de toutes les éventualités appartenant à A ou à B.
- L'intersection des événements A et B est l'événement A $\cap$ B formé de toutes les éventualités appartenant à la fois à A et à B
- Lorsque A $\cap$ B = $\varnothing$, il n'y a aucune éventualité commune. On dit que A et B sont disjoints ou incompatibles.

A et B, deux événements quelconques :	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A et B, deux événements incompatibles :	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Soit A, un événement quelconque et $\overline{A}$ son événement contraire formé de toutes les éventualités de E qui ne sont aps dans A. On a alors : $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

IV) Variables aléatoires

- Une variable aléatoire sur un univers E est une fonction T définie sur E.Si (t_1, t_2, … t_k) est l'ensemble des images par T de toutes les éventualités de E, on note (T = t_i) l'événement formé des éventualités qui ont pour image t_i par T, pour tout entier i compris entre 1 et k.

V) Probabilités conditionnelles

1) Probabilités avec condition

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilités totales :	$\begin{cases} P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{cases}$

2) Indépendance

- Soit E un univers et p une probabilité sur E. A et B sont deux entiers (différents de 0). A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$$

- Soir E un univers et p une probabilité sur E. on dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $\forall x_i$ et $\forall y_i$: $P[(X = x_i) \text{ et } (Y = y_i)] = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i)$

3) Expérience indépendante

- Soit n expériences aléatoires ayant chacune pour univers E_i et pour probabilité p_i , ces expériences sont indépendantes si : $P(a_1, a_2 \ldots a_n) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \ldots \cdot P_n(A_n)$