Intégrations et primitives

I) Définition de l'intégrale

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a, b]. On appelle intégrale de a à b de la fonction f, l'aire (en unité d'aire) située sous la courbe de la fonction f.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = A(E)}$$

- Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle [a, b]. On appelle intégrale de a à b de la fonction f, l'opposée de l'aire (en unité d'aire) entre l'axe (Ox) et la courbe.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -A(E)}$$

- Soit f une fonction continue et de signe non constant sur un intervalle [a, b]. On appelle intégrale de a à b de la fonction f, la somme algébriques des aires (en unité d'aire) des domaines compris entre l'axe (Ox) et la courbe.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = A(E_1) + A(E_2) + \ldots + A(E_n)}$$

II) Conventions d’écriture

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b 0dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

III) Propriétés

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = +\int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \times \int_a^b f(x)dx$$

Valeur moyenne : $\mu = \dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

IV) Définitions et théorèmes

- Soit une fonction f continue et définie sur I. On appelle primitive de f sur I, toute les fonctions définies et dérivables sur I telles que la dérivée F’(x) = f(x) ($\forall x \in I$)

- Si f est une fonction continue sur I et un réel a $\in$ I alors la fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I.
- Toutes fonctions continues sur I admettent une infinité de primitives. Si F est l'une d'entre elles alors l'ensemble des primitives de f sur I sont de la forme G(x) = F(x) + k (k $\in \mathbb{R}$)
- Soit une fonction f continue sur I. on donne $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une seule primitive F telle que $F(x_0) = y_0$

V) Calcul intégrale et intégration par parties

1) Formules pour le calcul intégral

• Formulaire 1 (primitives usuelles)

Si f est définie par $f(x) = \ldots$		sur I = …	ses primitives F sont telles que $F(x) = \ldots$	
a (constante)		$\mathbb{R}$	$ax + k$; $k \in \mathbb{R}$	
x^r avec : (i) r entier naturel non nul (ii) r entier relatif, $r \leqslant -2$		(i) $\mathbb{R}$ (ii) $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{x}$		(i) $]0 ; +\infty[$ (ii) $]-\infty ; 0[$	(i) $\ln(x) + k$; $k \in \mathbb{R}$ (ii) $\ln(-x) + k$; $k \in \mathbb{R}$	dans les deux cas : $\ln\|x\| + k$
$\frac{1}{x^2}$		$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$	$-\frac{1}{x} + k$; $k \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$]0 ; +\infty[$	$2\sqrt{x} + k$; $k \in \mathbb{R}$	
e^x		$\mathbb{R}$	$e^x + k$; $k \in \mathbb{R}$	
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + k$; $k \in \mathbb{R}$	$\sin x + k$; $k \in \mathbb{R}$

• Formulaire 2 (primitives de fonctions composées usuelles)

Si f est de la forme…		avec u dérivable sur I telle que…	alors une primitive F est de la forme…	
$u^p u'$ ($p \in \mathbb{Z}$, $p \neq -1$)		u ne s'annule pas sur I lorsque $p \leqslant -2$	$\frac{1}{p+1} u^{p+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$		u ne s'annule pas sur I	$-\frac{1}{u}$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$		$u > 0$ sur I	$2\sqrt{u}$	
$\frac{u'}{u}$		(i) $u > 0$ sur I (ii) $u < 0$ sur I	(i) $\ln(u)$ (ii) $\ln(-u)$	dans les deux cas : $\ln\|u\|$
$u'e^u$			e^u	
$u' \sin u$	$u' \cos u$		$-\cos u$	$\sin u$

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(B) - F(A)}$$

2) Intégration par partie

$$\boxed{\int_a^b [u(x)\times v'(x)]dx = [u(B)\times v(B) - u(A)\times v(A)] - \int_a^b [u'(x)\times v(x)]dx}$$