

Formules importantes dans les complexes

Dans tout le chapitre, z est un nombre complexe tel que $z = a + bi$

I) Notations des nombres complexes

Tout nombre complexe s'écrit « z » et possède 3 écritures différentes :

- Forme algébrique : $z = a + bi$
- Forme trigonométrique : $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$
- Forme exponentielle : $z = e^{i\theta}$

II) Les opérations dans les complexes

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b') \times i$$

$$(a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (b'a + ba') \times i$$

$$\frac{1}{(a + bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \times i$$

III) Cordonnées polaires et cartésiennes d'un complexe

1) Les coordonnées polaires

- $|z|$ est le module du nombre complexe z
- $\arg(z)$ est l'argument du nombre complexe z

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg(z) = \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2) Les coordonnées cartésiennes

$$a = r \times \cos \theta$$

$$b = r \times \sin \theta$$

3) Propriétés

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

IV) Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) La forme exponentielle

$$\begin{aligned} \text{(pour le cercle trigonométrique)} \quad & e^{i\theta} = \cos \theta + i \times \sin \theta \\ \text{(cas général)} \quad & z = r \times (\cos \theta + i \times \sin \theta) = r \times e^{i\theta} \end{aligned}$$

2) Propriétés

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} \\ (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \end{aligned}$$

V) Résolution d'équation du 2nd degré dans les complexes

$$\text{Soit } az^2 + bz + c = 0$$

- Si $\Delta > 0$ alors deux solutions réelles

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ z' &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$ alors une seule solution :

$$z = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ alors deux solutions complexes

$$z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

VI) Conjugué d'un nombre complexe

1) Définition

Soit z un nombre complexe alors son conjugué noté « z barre » est :

$$z = a + bi$$
$$\bar{z} = a - bi$$

2) Propriétés

$$\begin{aligned} &= \\ z &= z \\ z \times \bar{z} &= a^2 + b^2 = |z|^2 \\ \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} \\ z + \bar{z} &= 2 \times \Re(z) \\ z - \bar{z} &= 2i \times \Im(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{z \times z'} &= \bar{z} \times \bar{z}' \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \\ \overline{\lambda \times z} &= \lambda \times \bar{z} \\ \overline{z^n} &= (\bar{z})^n \end{aligned}$$